ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑ

Θεωρία Ελέγχου (814): Θέματα Εξετάσεων, Σεπτέμβρης 2025

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Κάθε υπο-ερώτημα αντιστοιχεί σε $0,8$ βαθμούς (σύνολο $12,8$ βαθμοί). Ο τελικός βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B, 10)$ όπου B το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή επιτυχία!

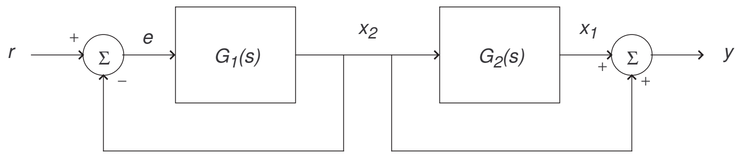
Θέμα 1: Έστω το διάγραμμα βαθμίδων στο *Σχήμα 1: Θέμα 1* όπου $\hat{G}_1(s) = \frac{k}{s-5}$, $\hat{G}_2(s) = \frac{-5}{s+2}$ και όπου k θετική παράμετρος.

(i) Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές x_1 και x_2 ως μεταβλητές κατάστασης, να βρείτε το μοντέλο καταστάσεων χώρου $\Sigma(A, B, C, D)$ του συστήματος με είσοδο $r(t)$ και έξοδο $y(t)$.

(ii) Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A στο (i) σαν συνάρτηση της παραμέτρου k και εξετάστε τις ιδιότητες ευστάθειας του πίνακα A. Υπολογίστε επίσης τον εκθετικό πίνακα e^{At} αν $k = 4$.

(iii) Υπολογίστε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με είσοδο $\hat{r}(s)$ και έξοδο $\hat{y}(s)$. Να βρείτε τους πόλους και τα μηδενικά της συνάρτησης αν $k = 2$.

(iv) Εξετάστε τις ιδιότητες Ελεγξιμότητας και Παρατηρησιμότητας του συστήματος καταστάσεων χώρου στο (i) σε σχέση με την τιμή της παραμέτρου k. Για ποιές τιμές του k είναι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς γνήσιο υποσύνολο του φάσματος (σύνολο ιδιοτιμών) του πίνακα A που υπολογίσατε στο (ii);



Σχήμα 1: Θέμα 1

Λύση: (i) Εξισώσεις καταστάσεων χώρου:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - 5x_2, \text{ και } \dot{x}_2 - 5x_2 = ke = k(r - x_2) \Rightarrow \dot{x}_2 + (k-5)x_2 = kr$$

η

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 5-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} r, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(ii) Ο πίνακας A είναι τριγωνικός και επομένως $\sigma(A) = \{-2, 5\}$. Τα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k-7}{5} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι αν $k = 7$ ο A έχει ιδιοτιμή 2 με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και δεν διαγωνιοποιείται (η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι ίση με 1). Τα ιδιοδιανύσματα $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ στην περίπτωση αυτή ταυτίζονται. Το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν $5 - k < 0 \Rightarrow k > 5$. Ο εκθετικός πίνακας είναι:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s+2 & 5 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & -5 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

η

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{-5}{s-1} + \frac{5/3}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -5e^t + \frac{5}{3}e^{-2t} \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(iii) Συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 5 \\ 0 & s+k-5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$$

η

$$G(s) = \frac{k(s-3)}{(s+2)(s+k-5)}$$

Αν $k = 2$,

$$G(s) = \frac{k(s-3)}{(s+2)(s-3)} = \frac{2}{s+2}$$

και έχουμε απαλλοιφή (ασταθούς) πόλου και μηδενικού στο $s = 3$. Εφόσον ο δεύτερος πόλος $s = -2$ είναι ευσταθής το σύστημα είναι BIBO-ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές (ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή $s = 3$).

(iv) Πίνακας ελεγξιμότητας:

$$\Gamma_c = \left[\begin{array}{cc} B & AB \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & -5k \\ k & k(5-k) \end{array} \right] \Rightarrow \det \Gamma_c = 5k^2 \neq 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και επομένως το σύστημα είναι ελέγξιμο εκτός από την τιμή $k = 0$ (για την οποία έχουμε $B = 0$). Πίνακας παρατηρησιμότητας:

$$\Gamma_o = \left[\begin{array}{c} C \\ CA \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -2 & -k \end{array} \right] \Rightarrow \det \Gamma_o = -k + 2 \neq 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ και επομένως το σύστημα είνα παρατηρήσιμο εκτός αν $k = 2$. Για αυτήν την τιμή το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο που εξηγεί την (μη-ευσταθή) απαλλοιφή πόλου και μηδενικού στο $s = 3$ και την απώλεια εσωτερικής ευστάθειας.

Θέμα 2: (i) Γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς: $\hat{G}(s) = \frac{s+3}{s^3+3s^2+2s}$. Να βρέθούν δύο πραγματοποιήσεις του συστήματος, $\Sigma(A, B, C, D)$, όπου, (α) το ζεύγος (A, B) είναι σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας, και (β) ο πίνακας A είναι διαγώνιος.

(ii) Έστω γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) = \frac{1}{d(s)} N(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ στην οποία $d(s) = s^2 + d_1 s + d_0$, $N(s) = N_1 s + N_0$ και όπου $d_0 \in \mathbb{R}$, $d_1 \in \mathbb{R}$, $N_0 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ και $N_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Δείξτε ότι το σύστημα έχει πραγματοποίηση $\Sigma(A, B, C, D)$, όπου

$$A = \left[\begin{array}{cc} 0_{m,m} & I_m \\ -d_0 I_m & -d_1 I_m \end{array} \right], \;\; B = \left[\begin{array}{c} 0_{m,m} \\ I_m \end{array} \right], \; C = \left[\begin{array}{cc} N_0 & N_1 \end{array} \right] \;\; \text{και} \;\; D = 0_{p,m}$$

και όπου $0_{p,m}$ είναι μηδενικός πίνακας διαστάσεων $p \times m$. Επομένως βρείτε μία πραγματοποίηση συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς: $G(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{array} \right]$.

Λύση: (ia) Έχουμε:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{array} \right], \;\; B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \;\; C = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \end{array} \right], \;\; D = 0$$

(ib) Διαχωρίζοντας σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{s+3}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{3/2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}$$

και επομένως μία πραγματοποίηση με διαγώνιο πίνακα A είναι:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right], \;\; B = \left[\begin{array}{c} 3/2 \\ -2 \\ 1/2 \end{array} \right], \;\; C = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array} \right], \;\; D = 0$$

(ii) Έστω:

$$H(s) = \left[\begin{array}{c} H_1(s) \\ H_2(s) \end{array} \right] = (sI_{2m} - A)^{-1} B \Rightarrow (sI_{2m} - A) H(s) = B$$

η

$$\begin{bmatrix} sI_m & -I_m \\ d_0 I_m & sI_m + d_1 I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}$$

και άρα

$$sH_1(s) - H_2(s) = 0,\ d_0 H_1(s) + sH_2(s) + d_1 H_2(s) = I_m \quad \Rightarrow \quad H_1(s) = \frac{1}{d(s)} I_m,\ H_2(s) = \frac{s}{d(s)} I_m$$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{d(s)} N_0 + \frac{s}{d(s)} N_1 = \frac{1}{d(s)} N(s) = \hat{G}(s) = C(sI_{2m} - A)^{-1} B$$

Για την συνάρτηση μεταφοράς που μας δόθηκε:

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} N(s), \quad d(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

όπου

$$N(s) = N_0 + N_1 s, \quad N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

και άρα μία πραγματοποίηση είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Θέμα 3: Δύο εκκρεμή μήκους l συνδέονται με ελατήριο ελαστικής σταθεράς k. Το ελατήριο συνδέεται στα εκκρεμή σε σημεία απόστασης a από τα κέντρα περιστροφής όπως δείχνει το *Σχήμα 2: Θέμα 3*. Το σύστημα ελέγχεται από ζεύγος ίσων δυνάμεων u αντίθετης φοράς. Έστω θ_1 και θ_2 οι γωνίες κάθε εκκρεμούς με την κατακόρυφο. Το μοντέλο του γραμμικοποιημένου συστήματος ορίζεται απο τις εξισώσεις:

$$\theta_1'' = -\frac{ka^2}{ml^2}(\theta_1 - \theta_2) - \frac{g}{l}\theta_1 - \frac{1}{ml}u \text{ και } \theta_2'' = -\frac{ka^2}{ml^2}(\theta_2 - \theta_1) - \frac{g}{l}\theta_2 + \frac{1}{ml}u$$

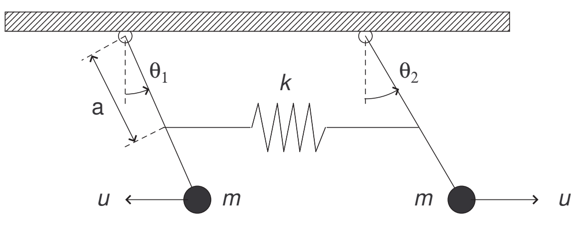
Όλες οι παράμετροι (k, l, a, m, g) είναι θετικές.

(i) Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σύστημα εξισώσεων να βρείτε μοντέλο καταστάσεων χώρου $\Sigma(A, B, C, D)$ με μεταβλητές κατάστασης: $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \theta_1'$, $x_3 = \theta_2$, $x_4 = \theta_2'$. Υποθέστε ότι η είσοδος του συστήματος είναι η δύναμη u και η έξοδος η γωνία θ_1.

(ii) Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα A στο (i). Ποιά είναι η φυσική τους σημασία;

(iii) Δείξτε ότι το σύστημα στο (i) δεν είναι ελέγξιμο και βρείτε την διάσταση του ελέγξιμου υπόχωρου.

(iv) Δείξτε ότι το σύστημα στο (i) είναι παρατηρήσιμο.



Σχήμα 2: Θέμα 3

Λύση: (i) Ορίζοντας τις μεταβλητές κατάστασης σύμφωνα με την υπόδειξη έχουμε:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu, \quad y = x_1$$

η

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} u, \;\; y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

όπου

$$\alpha = \frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}, \;\; \beta = \frac{ka^2}{ml^2} \;\text{ και }\; \gamma = \frac{1}{ml}$$

(ii) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I_4 - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \alpha & \lambda & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -\beta & 0 & \alpha & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \alpha & \lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -\beta & \alpha & \lambda \end{bmatrix}$$

η

$$\phi(\lambda) = \lambda^4 + 2\alpha\lambda^2 + \alpha^2 - \beta^2$$

Θέτοντας αυτό ίσο με μηδέν έχουμε: $\lambda^2 = -\alpha \pm \beta$, η

$$\lambda_1^2 = -\alpha - \beta = -\frac{2ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l} \Rightarrow \lambda_1 = \pm j\omega_1, \; \omega_1 = \sqrt{\frac{2ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}}$$

και

$$\lambda_2^2 = -\alpha + \beta = -\frac{g}{l} \Rightarrow \lambda_2 = \pm j\omega_2, \; \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Εφόσον δεν υπάρχει διάχυση ενέργειας οι τέσσερις πόλοι βρίσκονται στον άξονα των φανταστικών (στα σημεία $\pm j\omega_1$ και $\pm j\omega_2$) και επομένως αν $u = 0$ το σύστημα ταλαντώνεται με συχνότητες ω_1 και ω_2 rads/s.

(iii) Ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$$

όπου

$$B = \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; AB = \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$A^2B = \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha+\beta \\ 0 \\ -(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \gamma(\alpha+\beta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

και

$$A^3B = \gamma(\alpha+\beta) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \gamma(\alpha+\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως το rank του πίνακα Γ_c (που είναι ίσο με την διάσταση του ελέγξιμου υπόχωρου) είναι $2 < 4$ και το σύστημα είναι ελέγξιμο.

(iv) Πίνακας παρατηρησιμότητας:

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \det \Gamma_o = \beta^2 \neq 0$$

και το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Θέμα 4: Έστω το μη γραμμικό σύστημα:

$$x_1' = x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(k^2 + x_1^2 + x_2^2), \;\; x_2' = -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(k^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

(i) Δείξτε ότι το σημείο $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας του συστήματος για κάθε τιμή της παραμέτρου $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Γραμμικοποείστε το σύστημα γύρω από το σημείο ισορροπίας. Εξετάστε τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας σε σχέση με την τιμή της παραμέτρου k. [*Υπενθύμιση:* Έστω $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ μη γραμμικό σύστημα όπου $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη και $\mathbf{x}^*$ σημείο ισορροπίας. Το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το $\mathbf{x}^*$ είναι το σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ όπου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$].

(iii) Έστω ότι $k = 0$. Εκφράστε τις εξισώσεις του συστήματος σε πολικές συντεταγμένες (r,θ), δηλαδή στην μορφή: $r' = f_1(r,\theta)$ και $\theta' = f_2(r,\theta)$ όπου f_1 και f_2 κατάλληλες συναρτήσεις. Με χρήση των νέων εξισώσεων εξετάστε τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας. [*Υπενθύμιση:* Η σχέση μεταξύ των μεταβλητών σε πολικές και Καρτεσιανές συντεταγμένες ορίζεται ως: $x_1 = r\cos\theta$ και $x_2 = r\sin\theta$].

(iv) Υποθέστε πάλι ότι $k = 0$. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Lyapunov $V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ εξετάστε τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας και επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας στο ερώτημα (iii).

Λύση: (i) Αν $k \neq 0$ τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται λύνοντας:

$$x_1 = \frac{k^2 - x_1^2 - x_2^2}{k^2 + x_1^2 + x_2^2}x_2 \ \text{ και } \ x_2 = -\frac{k^2 - x_1^2 - x_2^2}{k^2 + x_1^2 + x_2^2}x_1$$

Επομένως

$$\left(1 + \frac{(k^2 - x_1^2 - x_2^2)^2}{(k^2 + x_1^2 + x_2^2)^2}\right)x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

Αν $k = 0$ έχουμε

$$(x_2 - x_1)r^2 = 0 \ \text{ και } \ (x_2 + x_1)r^2 = 0 \ \text{ όπου } \ r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Αν $r = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$, διαφορετικά ($x_1 + x_2 = 0$ και $x_1 - x_2 = 0$) που συνεπάγεται πάλι ότι $x_1 = x_2 = 0$. Σε κάθε περίπτωση $x_1 = x_2 = 0$ και επομένως (x_1, x_1) είναι το μόνο σημείο ισορροπίας ανεξάρτητα από την τιμή του k.

(ii) Πραγωγίζοντας:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= (k^2 - x_1^2 - x_2^2) - 2x_1^2 + 2x_1x_2, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -2x_1x_2 + 2x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2 + k^2) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -(k^2 + x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2 - 2x_1x_2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -2x_1x_2 + (k^2 - x_1^2 - x_2^2) - 2x_2^2
\end{aligned}$$

Άρα

$$A = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{(0,0)} = \begin{bmatrix} k^2 & k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow sI - A = \begin{bmatrix} s - k^2 & -k^2 \\ k^2 & s - k^2 \end{bmatrix}$$

και επομένως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ιδιοτιμές είναι:

$$\phi(s) = \det(sI - A) = (s - k^2)^2 + k^4 = s^2 - 2k^2 s + 2k^4 \Rightarrow s_{1,2} = k^2 \pm jk^2$$

Όταν $k \neq 0$ το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι ασταθές (και οι δύο ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος) και επομένως το σημείο ισορροπίας του μη-γραμμικού συστήματος, $(x_1, x_2) = (0,0)$, είναι επίσης ασταθές. Αν $k = 0$ ο πίνακας A του γραμμικοποιημένου συστήματος έχει ιδιοτιμή πάνω στον άξονα των φανταστικών. Εφόσον η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής αυτής είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα ($d = \tau = 2$), το σημείο ισορροπίας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι ευσταθές (κατά Lyapunon) αλλά όχι ασυμπτωτικά. Το συμπέρασμα είναι λογικό γιατί σε αυτή την περιπτωση κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ είναι σημείο ισορροπίας. Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι για τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $(x_1, x_2) = (0,0)$ του μη-γραμμικού συστήματος.

(iii) Παραγωγίζοντας τις σχέσεις: $x_1 = r\cos\theta$ και $x_2 = r\sin\theta$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = -r^3\cos\theta + r^3\sin\theta \\
\dot{x}_2 &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = -r^3\cos\theta - r^3\sin\theta
\end{aligned}$$

Εδώ $k = 0$. Από την Εξίσωση (1) $\times \cos\theta$ + Εξίσωση (2) $\times \sin\theta$ έχουμε $\dot{r} = -r^3$ ενώ από την $-$Εξίσωση (1) $\times \sin\theta$ + Εξίσωση (2) $\times \cos\theta$ έχουμε $\dot{\theta} = -r^2$. Το γράφημα $(r, f(r))$ δείχνει ότι $r \to 0$ για κάθε αρχική συνθήκη $r_0 \geq 0$. Επομένως όταν $k = 0$ το σημείο ισορροπίας (x_1, x_2) είναι (ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθές. Ολοκληρώνοντας έχουμε και πάλι το ίδιο συμπέρασμα:

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 + 2r_0^2 t}} \to 0 \ \text{ας}\ t \to \infty \ \text{και}\ \theta(t) = \theta_0 - \frac{1}{2}\ln(1 + 2r_0^2 t)$$

Η κατά κατεύθυνση παράγωγος κατά μήκους της λύσης δίνει:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = x_1^2(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_1x_2(k^2 + x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2^2(k^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

Απλοποιώντας:

$$\dot{V} = (x_1^2 + x_2^2)(k^2 - x_1^2 - x_2^2) = r^2(k^2 - r^2)$$

Αν $k = 0$, $\dot{V} = -r^4$ που είναι αρνητικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ ως προς το σημείο ισορροπίας και εφόσον $V(x_1, x_2)$ είναι ακτινικά μη φραγμένη συνάρτηση το σημείο ισορροπίας είναι ολικά ασυμπτωτκά ευσταθές.

[Αν $k \neq 0$, η συνάρτηση $\dot{V}$ είναι θετική σε σημεία αυθαίρετα κοντά στη $(0, 0)$ και επομένως το σημείο αυτό είναι ασταθές από το Θεώρημα του Cataev].

Θέμα 5: Έστω το σύστημα $\Sigma_i(A, b)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ \text{και}\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(i) Εξετάστε αν το σύστημα $\Sigma_i(A, b)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. Να βρεθεί ο ελέγξιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_c$ του συστήματος.

(ii) Να βρεθεί πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\det(Q) \neq 0$, και μετασχηματισμός ισοδυναμίας $\Sigma_i(A, b) \to \Sigma_i(Q^{-1}AQ, Q^{-1}b)$ τέτοιος ώστε το ζεύγος $(Q^{-1}AQ, Q^{-1}b)$ να είναι σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας Kalman, δηλαδή:

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \ Q^{-1}b = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{b}_1)$ πλήρως ελέγξιμο. Είναι το $\Sigma_i(A, b)$ σταθεροποιήσιμο μέσω ανάδρασης καταστάσεων;

Λύση: (i) Ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Η τρίτη στήλη είναι ίση με το άθροισμα της δεύτερης συν το διπλάσιο της πρώτης, άρα έχουμε $\text{rank}\Gamma_c = 2 < 3$ και άρα το $\Sigma_i(A, b)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

$$\mathcal{X} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle$$

(ii) Επιλέγουμε

$$Q = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow Q^{-1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Τότε

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \ \hat{b} = Q^{-1}b = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

που είναι σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας Kalman. Το σύστημα δεν είναι σταθεροποιήσιμο γιατί η (μοναδική) μη-ελέγξιμη ιδιοτιμή είναι θετική (και ίση με 1).