Ανάδραση Καταστάσεων - Παρατηρητές

1. Προκαταρκτικά

1.1 A-αναλλοίωτοι υπόχωροι - Αλλαγή συντεταγμένων: Έστω $\mathcal{V} = \mathcal{R}(M)$ A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ όπου $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ και όπου $\mathrm{Rank}(M) = k$. Έστω ότι $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$ έτσι ώστε ο πίνακας $[M\ \tilde{M}]$ μη-ιδιάζων. Εφόσον $\mathcal{R}(M)$ A-αναλλοίωτος,

$$A\left[\begin{array}{cc} M & \tilde{M}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} AM & A\tilde{M}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} M & \tilde{M}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} X & Y \\ 0 & Z\end{array}\right]$$

όπου $X \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Επομένως:

$$\left[\begin{array}{c} Y \\ Z\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} M & \tilde{M}\end{array}\right]^{-1} A\tilde{M} := T^{-1}A\tilde{M},\ \text{ όπου } T = \left[\begin{array}{cc} M & \tilde{M}\end{array}\right]$$

δηλαδή:

$$T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc} X & Y \\ 0 & Z\end{array}\right]$$

Συνοψίζοντας: Αν $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος, τότε: (α) Ο πίνακας A σε νέες συντατεγμένες (που αντιστοιχούν μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας) είναι block άνω-τριγωνικός, και (β) Ο $\mathcal{V}$ στις νέες συντεταγμένες είναι της μορφής:

$$\left\{\left[\begin{array}{c} z \\ 0\end{array}\right] : z \in \mathbb{R}^k\right\} = \mathcal{R}\left(\left[\begin{array}{c} I_k \\ 0\end{array}\right]\right)$$

1.2 Εξισώσεις Sylvester: Πινακοεξίσωση της μορφής: $AX + XB = C$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times r}$ και $X \in \mathbb{R}^{n\times r}$. Πότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση (ως προς X) γιά κάθε C;. Ορίζουμε τον (γραμμικό) τελεστή Sylvester $S(X) : \mathbb{R}^{n\times r} \to \mathbb{R}^{n\times r}$, $S(X) = AX + XB$. Η εξίσωση $S(X) = C$ έχει μοναδική λύση X (για κάθε C) αν και μόνο αν ο τελεστής S είναι μη-ιδιάζων, ισοδύναμα $\mathrm{Ker}(S) = \{0_{n,r}\}$. Όμως, ο S είναι ιδιάζων αν και μόνο αν υπάρχει $X \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $X \neq 0$, τέτοιος ώστε $S(X) = 0 \Leftrightarrow AX = X(-B)$, δηλαδή ο S είναι ιδιάζων αν αν οι πίνακες A και $-B$ έχουν κοινή ιδιοτιμή. Το αντίστροφο ισχύει επίσης, δηλαδή αν οι A και $-B$ έχουν κοινή ιδιοτιμή ο S είναι ιδιάζων: ˜εστω ότι:

$$Av = \lambda v,\ \ w^T B = -\lambda w^T,\ \ v \neq 0,\ \ w \neq 0$$

Τότε, αν $X = vw^T$, $X \neq 0$ και

$$S(X) = AX + XB = Avw^T + vw^T B = \lambda vw^T + v(-\lambda w^T) = 0$$

και ο S είναι ιδιάζων. Συμπεραίνουμε ότι ο S είναι ιδιάζων αν και μόνο αν οι πίνακες A και $-B$ έχουν (τουλάχιστον μία) κοινή ιδιοτιμη. Ισοδύναμα η εξίσωση Sylvester $AX + XB = C$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, r$, ($\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(B) \neq 0$ αν A και B είναι μιγαδικοί πίνακες).

Έστω σύστημα $x' = Ax$ όπου

$$A = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{array}\right],\ \ A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1},\ A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-n_1)\times(n-n_1)}, \sigma(A_{11}) \subseteq \mathbb{C}_-,\ \ \sigma(A_{22}) \subseteq \bar{\mathbb{C}}_+$$

Εφόσον $\sigma(A_{11}) \cap \sigma(A_{11}) = \emptyset$, η εξίσωση Sylvester: $XA_{22} - A_{11}X + A_{12} = 0$ έχει μοναδική λύση. Ορίζουμε μετασχηματισμό

$$z = Q^{-1}x \Rightarrow z' = \hat{A}z, \;\; \hat{A} := Q^{-1}AQ, \;\; Q := \begin{bmatrix} I_{n_1} & -X \\ 0 & I_{n-n_1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & X \\ 0 & I_{n-n_1} \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & X \\ 0 & I_{n-n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & -X \\ 0 & I_{n-n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & XA_{22} - A_{11}X + A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Αν (λ, x) ζεύγος ιδιοτιμής - ιδιοδιανύσματος του πίνακα $\hat{A}$, τότε $Q^{-1}AQx = \lambda x \Rightarrow A(Qx) = \lambda(Qx)$ και (λ, Qx) ζεύγος ιδιοτιμής - ιδιοδιανύσματος του πίνακα A. Έστω $\mathcal{X}_-(A)$, $\mathcal{X}_+(A)$ και $\mathcal{X}_c(A)$ ο ευσταθής, ασταθής και κεντρικός ιδιόχωρος, αντίστοιχα, του πίνακα A. Τότε, εφόσον

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} \;\; \text{και} \;\; \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-n_1} \end{bmatrix}$$

είναι βάσεις του $\mathcal{X}_-(\hat{A})$ και $\mathcal{X}_+(\hat{A}) \oplus \mathcal{X}_c(\hat{A})$, αντίστοιχα, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & X \\ 0 & I_{n-n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} \;\; \text{και} \;\; \begin{bmatrix} I_{n_1} & X \\ 0 & I_{n-n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ I_{n_1} \end{bmatrix}$$

είναι βάσεις του $\mathcal{X}_-(A)$ και $\mathcal{X}_+(A) \oplus \mathcal{X}_c(A)$, αντίστοιχα.

2. Ανάδραση Καταστάσεων: Συστήματα μίας εισόδου ($m = 1$)

Διαμόρφωση συνάρτησης εισόδου μέσω μεταβλητών κατάστασης ώστε να μεταβάλουμε τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος (ευστάθεια, ταχύτητα απόκρισης, απόσβεση ταλαντώσεων, κλπ). Έστω σύστημα μίας εισόδου:

$$\Sigma_i(A, b) : x' = Ax + bu, \; x(0) = x_0, \; A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \; b \in \mathbb{R}^n$$

Θέτουμε $u = f^T x$ όπου $f \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα ανάδρασης καταστάσεων που πρέπει να επιλέξουμε. Υποθέτουμε ότι $\Sigma_i(A, b)$ είναι πλήρως ελέγξιμο, δηλαδή:

$$\det \Gamma_c \neq 0, \;\; \Gamma_c = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \ldots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Έστω $\phi(\lambda)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

Ορίζουμε επίσης τα διανύσματα: $\{q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1, q_0\}$ αναδρομικά ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} q_n &= b \\ q_{n-1} &= Aq_n + a_{n-1}b = Ab + a_{n-1}b \\ q_{n-2} &= Aq_{n-1} + a_{n-2}b = A^2b + a_{n-1}Ab + a_{n-2}b \\ &\vdots \\ q_1 &= Aq_2 + a_1 b = A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \ldots + a_1 b \end{aligned} \right\}$$

Λήμμα: (α) $Aq_1 + a_0 b = 0$. (β) Ο πίνακας:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

είναι μη ιδιάζων αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_i(A,b)$ είναι πληρως ελέγξιμο.

Απόδειξη: (α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} Aq_1 + a_0 b &= A(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 b) + a_0 b \\ &= (A^n b + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n)b \\ &= \phi(A)b = 0 \end{aligned}$$

(β) Οι σχέσεις που ορίζουν τα q_i γράφονται σε μορφή πινακοεξίσωσης $Q = \Gamma_c H_a$, όπου:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & Ab & \ldots & A^{n-2}b & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \iddots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_{n-2} & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και όπου ο H_a είναι πίνακας Hankel. Έχουμε: $\det Q = \det \Gamma_c \cdot \det H_a = (-1)^{n+1} \det \Gamma_c \neq 0$ αν και μόνο αν $\Sigma_i(A,b)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. □

Θεώρημα: Το σύστημα $\Sigma_i(A,b)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας T^{-1}, $\Sigma_i(A,b) \sim \Sigma_i(\tilde{A},\tilde{b})$, $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det T \neq 0$, τέτοιος ώστε:

$$\tilde{A} := TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} := Tb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Σημείωση:</u> Ο πίνακας $\tilde{A}$ είναι σε μορφή companion και το σύστημα $\Sigma_i(\tilde{A},\tilde{b})$ σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$): Έστω $\Sigma_i(A,b)$ πλήρως ελέγξιμο. Τοτε $\det)\Gamma_c) \neq 0$. Ορίζουμε πίνακα Q όπως στο προηγούμενο Λήμμα και επιλέγουμε μετασχηματισμό ισοδυναμίας $T = Q^{-1}$. Θα επαληθεύσουμε τις σχέσεις: $Q\tilde{b} = b$ και $AQ = Q\tilde{A}$. Έχουμε:

$$q_n = b \Rightarrow Q\tilde{b} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

Έχουμε επίσης:

$$\left.\begin{aligned} Aq_n &= q_{n-1} - a_{n-1}b = q_{n-1} - a_{n-1}q_n \\ Aq_{n-1} &= q_{n-2} - a_{n-2}b = q_{n-2} - a_{n-2}q_n \\ &\vdots \\ Aq_2 &= q_1 + a_1 b = q_1 + a_1 q_n \end{aligned}\right\}$$

Σε αυτές προσθέτουμε την σχέση (Λήμμα, μέρος α): $Aq_1 = a_0 b = -a_0 q_n$. Οι σχέσεις γράφονται σε μορφή πινακοεξίσωσης ως:

$$A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

δηλαδή $AQ = Q\tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} = Q^{-1}AQ = TAT^{-1}$.

($\Leftarrow$): Έστω ότι υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας T^{-1} έτσι ώστε $\Sigma_i(A,b) \sim \Sigma_i(\tilde{A},\tilde{b})$, όπου $\Sigma_i(\tilde{A},\tilde{b})$ σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας. Ο πίνακας ελεγξιμότητας του $\Sigma_i(\tilde{A},\tilde{b})$ είναι:

$$\tilde{\Gamma}_c = \left[\begin{array}{ccccc} \tilde{b} & \tilde{A}\tilde{b} & \ldots & \tilde{A}^{n-2}\tilde{b} & \tilde{A}^{n-1}\tilde{b} \end{array}\right]$$

όπου

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}\tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -a_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^2\tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

κ.λ.π., δηλαδή

$$\tilde{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & * \\ \vdots & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\Gamma_c) = (-1)^{n+1} \neq 0$$

Επομένως $\Sigma_i(\tilde{A},\tilde{b})$ πλήρως ελέγξιμο $\Rightarrow \Sigma_i(A,b)$ πλήρως ελέγξιμο, αφού οι ιδιότητες ελεγξιμότητας είναι αναλλοίωτες από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας. □

Το σύστημα ελέγχεται με ανάδραση καταστάσεων $u = f^T x$ που μετατρέπει το σύστημα ¨ανοικτού βρόγχου' (open loop) σε σύστημα ¨κλειστού βρόγχου' (closed-loop). Η δυναμική εξίσωση είναι:

$$x' = Ax + bu = Ax + bf^T x = A_c x \;\text{ όπου }\; A_c := A + bf^T$$

(ο A_c είναι ο αντίστοιχος πίνακας A κλειστού βρόγχου). Ο σχεδιασμός ανάδρασης καταστάσεων αφορά την επιλογή του διανύσματος $f \in \mathbb{R}^n$ ώστε ο πίνακας $A_c = A + bf^T$ να έχει επιθυμητές ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές συνήθως εκφράζονται σε σχέση με το φάσμα του πίνακα A_c και περιλαμβάνουν:

(α) Ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος $x' = A_c x$, δηλαδη ο A_c να είναι πίνακας Hurwitz ($\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$ η ισοδύναμα $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A_c)$).

(β) Ταχεία απόκριση σε σήματα εισόδου (rise-time και settling-time specifications) της μορφής $|\lambda| \geq \omega_n^o$ και $\mathrm{Re}(\lambda) \leq -\alpha$, $\lambda \in \sigma(A)$, για κατάλληλες παραμέτρους $\omega_n^o > 0$ και $\alpha > 0$.

(γ) Απόσβεση ταλαντώσεων: $|\mathrm{Re}(\lambda)|/|\lambda| \geq \zeta_0$, $\lambda \in \sigma(A_c)$, όπου ζ_0 ο ελάχιστος επιθυμητός συντελεστής απόσβεσης.

Το επόμενο Θεώρημα εγγυάται ότι αν το σύστημα $\Sigma_i(A,b)$ είναι πλήρως ελέγξιμο τότε μπορούμε (μέσω της επιλογής του διανύσματος f) να καθορίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi_d(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$, $\partial(\phi_d) = n$, του πίνακα A_c αυθαίρετα (ισοδύναμα, μπορούμε να τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A_c σε αυθαίρετα σημεία του μιγαδικού επιπέδου - υπό τον περιορισμό βέβαια ότι για κάθε επιθυμητή μιγαδική ιδιοτιμή $\sigma + i\omega$ έχουμε και την συζυγή της $\sigma - i\omega$ και με την ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα).

Θεώρημα: Το σύστημα $\Sigma_i(A,b)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν για κάθε μονικό πολυώνυμο $\phi_d(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$, $\partial\phi_d(\lambda) = n$, (δηλαδή κάθε πολυώνυμο $\phi_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$, $d_i \in \mathbb{R}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$), υπάρχει $f \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A + bf^T$ να είναι ίσο με $\phi_d(\lambda)$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$): Έστω $\Sigma_i(A,b)$ πλ·ηρως ελέγξιμο και $\phi_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$, $d_i \in \mathbb{R}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\det(\lambda I_n - A - bf^T) = \phi_d(\lambda)$. Από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, τέτοιος ώστε: $\Sigma_i(A,b) \sim \Sigma_i(\tilde{A},\tilde{b})$, $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$, $\tilde{b} = Q^{-1}b$ και $\Sigma_i(\tilde{A},\tilde{b})$ σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας, δηλαδή:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα κατάστασης στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων ($x' = Ax+bu$) και $z = Q^{-1}x$ (ώστε $z' = \tilde{A}z + \tilde{b}u$). Έχουμε:

$$u = f^Tx = f^TQQ^{-1}x = f^TQz = \tilde{f}^Tz \ \text{ όπου } \ \tilde{f}^T := f^TQ$$

Επομένως

$$z' = \tilde{A}z + \tilde{b}\tilde{f}^Tz = (\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{f}^T)z = (Q^{-1}AQ + Q^{-1}bf^TQ)z = Q^{-1}(A + bf^T)Qz$$

Επιλέγουμε:

$$\tilde{f}^T = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 & \tilde{f}_1 & \ldots & \tilde{f}_{n-1} \end{bmatrix} = a^T - d^T := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \ldots & d_{n-1} \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{f}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 & \tilde{f}_1 & \cdots & \tilde{f}_{n-2} & \tilde{f}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{f}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 + \tilde{f}_0 & -a_1 + \tilde{f}_1 & \cdots & -a_{n-2} + \tilde{f}_{n-2} & -a_{n-1} + \tilde{f}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \cdots & -d_{n-2} & -d_{n-1} \end{bmatrix}$$

Εφόσον ο τελευταίος πίνακας είναι σε μορφή companion και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο πίνακα είναι αναλλοίωτο κάτω απο μετασχηματισμούς ομοιότητας,

$$\det(\lambda I_n - A_c) = \det(\lambda I_n - A - bf^T) = \det(\lambda I_n - \tilde{A} - \tilde{b}\tilde{f}^T) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_0 = \phi_d(\lambda)$$

όπου $f^T = \tilde{f}^TQ^{-1}$. Από προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι $Q^{-1} = (\Gamma_cH_a)^{-1}$ όπου,

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} b & Ab & \ldots & A^{n-2}b & A^{n-1}b \end{bmatrix} \ \text{ και } \ H_a = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \iddots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_{n-2} & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και επομένως $f^T = (a^T - d^T)(\Gamma_c H_a)^{-1}$.

($\Leftarrow$): Αντίστροφα, έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A_c = A + bf^T$ μπορεί να καθοριστεί αυθαίρετα μέσω της επιλογής του f^T. Υποθέτουμε (γιά αντίφαση) ότι το σύστημα $\Sigma_i(A,b)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας, $\hat{x} = Rx$, $\det(R) \neq 0$, τέτοιος ώστε το σύστημα σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας Kalman περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\hat{x}' = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $n_1 < n$ και $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{b}_1)$ πλήρως ελέγξιμο. Ορίζουμε $\hat{f}^T = f^T R^{-1}$. Στίς νέες συντεταγμένες,

$$u = \hat{f}^T \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1^T & \hat{f}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \hat{f}_1^T \hat{x}_1 + \hat{f}_2^T \hat{x}_2$$

όπου $\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ και $\hat{f}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$. Τότε:

$$\hat{x}' = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_1^T & \hat{f}_2^T \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + \hat{b}_1 \hat{f}_1^T & \hat{A}_{12} + \hat{b}_1 \hat{f}_2^T \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{x}$$

Εφόσον το χαρακτηριστικό πολυώνυμο πίνακα είναι αναλλοίωτο από μετασχηματισμούς ομοιότητας:

$$\det(\lambda I_n - A - bf^T) = \det(\lambda I_n - \hat{A} - \hat{b}\hat{f}^T) = \psi_1(\lambda)\psi_2(\lambda)$$

όπου

$$\psi_1(\lambda) = \det(\lambda I_{n_1} - \hat{A}_{11} - \hat{b}_1 \hat{f}_1^T) \ \text{ και } \ \psi_2(\lambda) = \det(\lambda I_{n-n_1} - \hat{A}_{22})$$

Εφόσον το σύστημα $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{b}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο το πολυώνυμο $\psi_1(\lambda)$ καθορίζεται αυθαίρετα (στο σύνολο $\{\phi \in \mathbb{R}[\lambda] : \partial\phi = n_1\}$). Αντίθετα, το $\psi_2(\lambda)$ είναι κάποιο συγκεκριμένο πολυώνυμο βαθμού $\partial\psi_2 = n - n_1$, συμπέρασμα που αντιβαίνει στην υπόθεση και οδηγεί σε αντίφαση. $\square$

Παρατήρηση: Από την απόδειξη προκύπτει άμεσα ότι αν το σύστημα $\Sigma_i(A,b)$ είναι πλήρως ελέγξιμο, τότε το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Αν το σύστημα δεν είναι πλήρως ελέγξιμο τότε το πρόβλημα έχει λύση μόνο αν $\psi_2 := \det(\lambda I_{n-n_1} - \hat{A}_{22}) \mid \phi_d(\lambda)$ (δηλαδή το ψ_2 είναι διαιρέτης του ϕ_d). Το πολυώνυμο ψ_2 δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες του χώρου κατάστασης και οι ρίζες του είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A που δεν είναι ελέγξιμες από την είσοδο (με τις αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες). Στην περίπτωση που $\psi_2 \mid \phi_d$ η λύση είναι μοναδική (πάντα για συστήματα μίας εισόδου).

Παράδειγμα: Έστω $\Sigma_i(A,b)$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\phi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2 = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda$$

και επομένως ο A δεν είναι Hurwitz. Ζητείται να βρεθεί (αν υπάρχει) ανάδραση καταστάσεων ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόγχου να είναι

$$\phi_d(\lambda) = (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

Ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε $\det(\Gamma_c) = -1 \neq 0$ και επομένως $\Sigma_i(A,b)$ πλήρως ελέγξιμο. Άρα η ζητούμενη θέση των ιδιοτιμών είναι εφικτή. Έχουμε:

$$a^T = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow H_a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\Gamma_c H_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\Gamma_c H_a)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης:

$$\phi_d(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \Rightarrow d^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

και

$$\tilde{f}^T = a^T - d^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

και

$$f^T = \tilde{f}^T (\Gamma_c H_a)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$

Σύστημα κλειστού βρόγχου:

$$x' = A_c x = (A + bf^T)x, \;\; A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -8 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\phi_d(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda+4 & 8 & 7 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$$

(σωστά!)

3. Ανάδραση Καταστάσεων: Συστήματα πολλών εισόδων ($m > 1$)

Έστω $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο, $x' = Ax + Bu$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^n \times m$, $m > 1$. Πως γενικεύονται τα αποτελέσματα σε αυτήν την περίπτωση;

Θεώρημα: Έστω $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο. Τότε υπάρχει $F_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $v \in \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε $\Sigma_i(A + BF_0, Bv)$ πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη: Έστω $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο. Τότε $B \neq 0$ και υπάρχει $v \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $Bv \neq 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ που ορίζεται επαγωγικά γιά κάποια $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ ως:

$$e_1 = Bv, \; e_{j+1} = Ae_j + Bu_j, \;\; j = 1, 2, \ldots, n-1$$

που είναι βάση του $\mathbb{R}^n$: Έστω ότι η ακολουθία δεν μπορεί να ολοκληρωθεί. Τότε, για κάποιο $k \geq 0$ υπάρχουν διανύσματα $\{e_1, e_2, \ldots e_k\}$ (που αντιστοιχούν σε διανύσματα $\{u_1, u_2, \ldots u_k\}$) τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα και *για κάθε* $u \in \mathbb{R}^m$ το διάνυσμα $Ae_k + Bu \in \, <e_1, e_2, \ldots, e_k> := E_0$. Επιλέγοντας

$$u = 0 \Rightarrow Ae_k \in E_0 \Rightarrow Bu \in E_0 \;\forall\, u \in \mathbb{R}^m \Rightarrow Ae_j := e_{j+1} - Bu_j \in E_0 \;\forall\, j = 1, 2, \ldots k$$

Άρα $Ae_j \in E_0$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots k$.

Εφόσον $Bu \in E_0$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^m$ και $Ae_j \in E_0$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots k$, ο υπόχωρος E_0 είναι A-αναλλοίωτος και περιέχει το $\mathcal{R}(B)$, και άρα, απο προηγούμενο αποτέλεσμα, $\mathcal{X}_c \subseteq E_0$, όπου $\mathcal{X}_c$ ο ελέγξιμος υπόχωρος του $\Sigma_i(A, B)$. Λόγω πλήρους ελεγξιμότητας του $\Sigma_i(A, B)$:

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{X}_c \subseteq E_0 \Rightarrow E_0 = \mathbb{R}^n$$

δηλαδή $k = n$ και $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ βάση του $\mathbb{R}^n$ (και ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται).

Ορίζουμε γραμμικό μετασχηματισμό $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : F_0 e_j = u_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε:

$$e_{j+1} = Ae_j + Bu_j = (A + BF_0)e_j = \ldots = (A + BF_0)^j e_0 = (A + BF_0)^j Bv, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

Ο πίνακας ελεγξιμότητας του $\Sigma_i(A + BF_0, Bv)$ είναι:

$$\Gamma_c = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Bv & (A + BF_0)Bv & \ldots & (A + BF_0)^{n-1}Bv \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{array}\right]$$

και επομένως $\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = n$ εφόσον $\{e_i\}_{i=1}^n$ βάση του $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς $\Sigma_i(A + BF_0, Bv)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. □

Θεώρημα: Έστω $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Έστω $\phi_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-2} + \ldots + d_1\lambda + d_0$, $d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, αυθαίρετο πολυώνυμο. Τότε υπάρχει $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ έτσι ώστε το χαρακτηρηστικό πολυώνυμο του πίνακα $A + BF$ να είναι ισο με $\phi_d(\lambda)$.

Απόδειξη: Εφόσον $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο τότε από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχουν $F_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $v \in \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε $\Sigma_i(A + BF_0, Bv)$ να είναι πλήρως ελέγξιμο. Επομένως, υπάρχει $f \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $(A+BF_0)+(Bv)f^T$ να επιλέγεται αυθαίρετα. Ορίζοντας $F = F_0 + vf^T$ συμπεραίνουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A + BF$ μπορει να επιλεγεί αυθαίρετα που αποδεικνύει το Θε·ωρημα. □

Ορισμός: Το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, είναι σταθεροποιήσιμο (stabilisable) αν υπάρχει $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + BF$ να είναι Hurwitz (δηλαδή $\sigma(A + BF) \subseteq \mathbb{C}_-$).

Θεώρημα: Το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, είναι σταθεροποιήσιμο αν και μόνο αν:

$$\mathrm{Rank}\left(\left[\begin{array}{cc} sI_n - A & B \end{array}\right]\right) = n \ \text{ γιά κάθε } \ s \in \bar{\mathbb{C}}_+ := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 0\}$$

(ισοδύναμα: για κάθε $\lambda \in \sigma(A) \cap \bar{\mathbb{C}}_+$).

Απόδειξη: Έστω $\Sigma_i(A, B) \sim \Sigma_i(\hat{A}, \hat{B})$ όπου $\Sigma_i(\hat{A}, \hat{B})$ σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας Kalman, δηλαδή:

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right], \ \hat{B} = Q^{-1}B = \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ 0 \end{array}\right]$$

όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c}$, $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_c\times m}$ και $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο. Εφόσον:

$$A + BF = Q\hat{A}Q^{-1} + Q\hat{B}F = Q\hat{A}Q^{-1} + Q\hat{B}FQQ^{-1} = Q(\hat{A} + \hat{B}\hat{F})Q^{-1}$$

όπου ορίσαμε $\hat{F} = FQ$ και η απεικόνιση $F \to \hat{F}$ είναι 1 προς 1, το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_i(\hat{A}, \hat{B})$ είναι σταθεροποιήσιμο. Έστω

$$\hat{F} = \left[\begin{array}{cc} \hat{F}_1 & \hat{F}_2 \end{array}\right], \ \hat{F}_1 \in \mathbb{R}^{m\times n_c}, \ \hat{F}_2 \in \mathbb{R}^{m\times(n-n_c)}$$

Τότε:

$$\hat{A} + \hat{B}\hat{F} = \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \hat{F}_1 & \hat{F}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} + \hat{B}_1\hat{F}_1 & \hat{A}_{12} + \hat{B}_1\hat{F}_2 \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right]$$

και

$$\sigma(A + BF) = \sigma(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}) = \sigma(\hat{A}_{11} + \hat{B}_1\hat{F}_1) \cup \sigma(\hat{A}_{22})$$

Εφόσον $\Sigma_1(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο υπάρχει $\hat{F}_1$ τέτοιο ώστε $\sigma(\hat{A}_{11} + \hat{B}_1\hat{F}_1) \subseteq \mathbb{C}_-$ και επομένως $\Sigma_i(A, B)$ σταθεροποιήσιμο αν και μόνο αν $\sigma(\hat{A}_{22}) \subseteq \mathbb{C}_-$. Επομένως, $\Sigma_i(A, B)$ σταθεροποιήσιμο αν και μόνο αν:

$$\text{Rank}\left(\left[\begin{array}{cc|c} sI_{n_c} - \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} & \hat{B}_1 \\ 0 & sI_{n-n_c} - \hat{A}_{22} & 0 \end{array}\right]\right) = n \text{ για κάθε } s \in \bar{C}_+$$

$$\Leftrightarrow \text{Rank}\left(\left[\begin{array}{c|c} sI_n - \hat{A} & \hat{B} \end{array}\right]\right) = n \text{ για κάθε } s \in \bar{C}_+$$

$$\Leftrightarrow \text{Rank}\left(Q\left[\begin{array}{c|c} sI_n - \hat{A} & \hat{B} \end{array}\right]\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\right) = n \text{ για κάθε } s \in \bar{C}_+$$

$$\Leftrightarrow \text{Rank}\left(\left[\begin{array}{c|c} sI_n - Q\hat{A}Q^{-1} & Q\hat{B} \end{array}\right]\right) = n \text{ για κάθε } s \in \bar{C}_+$$

$$\Leftrightarrow \text{Rank}\left(\left[\begin{array}{c|c} sI_n - A & B \end{array}\right]\right) = n \text{ για κάθε } s \in \bar{C}_+$$

Η ισοδύναμη συνθήκη προκύπτει από τη παρατήρηση ότι η δέσμη πινάκων μπορεί να χάσει rank μόνο σε ιδιοτιμή του πίνακα A. □

4. Παρατηρητές

Έστω το σύστημα: $\Sigma(A, B, C, D) : x' = Ax + Bu$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y = Cx + Du$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Ένας παρατηρητής κατασκευάζει μία εκτίμηση $\hat{x}(t)$, $t \geq 0$, της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος Σ, με χρήση της εισόδου και της εξόδου του Σ στο (πεπερασμένο) διάστημα $[0, t_1]$, δηλαδή τις μετρήσεις: $\{(u(t), y(t)) : t \in [0, t_1]\}$. Ο παρατηρητής είναι δυναμικό σύστημα που ορίζεται από τις εξισέσεις:

$$\Sigma_{\text{obs}} : \hat{x} = A\hat{x} + Bu - L(y - \hat{y}), \;\; \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \; \hat{y} = C\hat{x} + Du$$

Ο $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ είναι ο πίνακας ενίσχυσης του παρατηρητή που πρέπει να επιλεγεί ώστε το σφάλμα εκτίμησης $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \to 0$ καθώς $t \to +\infty$. Επιπλέον, πολλές φορές μέσω της επιλογής του πίνακα L επιθυμούμε να διαμορφώσουμε και άλλα δυναμικά χαρακτηριστικά του παρατηρητή.

Παραγωγίζοντας το σφάλμα εκτίμησης:

$$e' = x' - \hat{x}' = Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu - L(Cx + Du - C\hat{x} - Du)] = (A + LC)(x - \hat{x}) = (A + LC)e$$

και άρα

$$e(t) = \exp[(A + LC)t]e_0, \;\; e_0 = e(0) = x_0 - \hat{x}_0$$

Επομένως,

$$e(t) \to 0 \text{ για κάθε } e_0 \in \mathbb{R}^n \;\; \Leftrightarrow \;\; \sigma(A + LC) \subseteq \mathbb{C}_-$$

Ορισμός: Το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ λέγεται ανιχνεύσιμο (detectable) αν το δυικό σύστημα $\Sigma_i(A^T, C^T)$ είναι σταθεροποιήσιμο.

Θεώρημα: (α) Υπάρχει πίνακας $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ώστε ο $A + LC$ να είναι πίνακας Hurwitz αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι ανιχνεύσιμο. (β)Υπάρχει πίνακας $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ώστε ο πίνακας $A + LC$ να έχει αυθαίρετο χαρακτηριστικό πολυώνυμο αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι παρατηρήσιμο.

Απόδειξη: (α) Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ανιχνευσιμότητας και την κανονική μορφή Kalman. (β) Το αποτέλεσμα προκύπτει από την παρατήρηση ότι ένας πίνακας και ο ανάστροφος του έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A + LC$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μέσω του L αν και μονο αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A^T + C^T L^T$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μέσω του L^T, η, ισοδύναμα αν το σύστημα $\Sigma_i(A^T, C^T)$ είναι πλήρως ελέγξιμο (ισοδύναμα το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο). □

5. Ανάδραση εξόδου και αρχή διαχωρισμού

Συνδιασμός παρατηρητή και ανάδρασης καταστάσεων αλλ·α εφαρμοσμένης στην εκτίμηση $\hat{x}$ του παρατηρητή (και όχι στο πραγματικό διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ το οποίο εδώ υποθέτουμε ότι δεν είναι προσβάσιμο). Ο συνδιασμός ισοδυναμεί με δυναμικό αντισταθμιστή εξόδου. Οι δυναμικές εξισώσεις είναι:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \;\; x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \;\; y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{Σύστημα υπό έλεγχο, Plant})$$

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (\text{Παρατηρητής, Observer-Estimator})$$

$$u(t) = r(t) + F\hat{x}(t) \quad (\text{Ανάδραση καταστάσεων, State-feedback})$$

όπου $r(t)$ εξωτερικό σήμα. Οι εξισώσεις γράφοντα:

$$\begin{aligned} x' &= Ax + BF\hat{x} + Br \\ \hat{x}' &= A\hat{x} + Bu - L[Cx + Du - C\hat{x} - Du] = -LCx + (A + BF + LC)\hat{x} + Br \\ y &= Cx + D(F\hat{x} + r) = Cx + DF\hat{x} + Dr \end{aligned}$$

Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} x' \\ \hat{x}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BF \\ -LC & A + BF + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r, \quad y = \begin{bmatrix} C & DF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + Dr$$

Ορίζοντας ως μεταβλητές κατάστασης την κατάσταση του συστήματος προς έλεγχο (x) και το σφάλμα της εκτίμησης ($e = x - \hat{x}$) οι εξισέσεις γράφονται ως:

$$\begin{aligned} x' &= Ax + BF(x - e) + Br = (A + BF)x - BFe + Br \\ e' &= Ax + BF\hat{x} + Br - [-LCx + (A + BF + LC)e + Br] = (A + LC)(x = \hat{e}) = (A + LC)e \\ y' &= Cx + DF(x - e) + Dr = (C + DF)x - DFe + Dr \end{aligned}$$

η

$$\begin{bmatrix} x' \\ e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r, \quad y = \begin{bmatrix} C + DF & -DF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + Dr$$

Παρατηρούμε ότι $\sigma(A_c) = \sigma(A+BF) \cup \sigma(A+LC)$ και επομένως τα δύο προβλήματα (σχεδίασης ανάδρασης καταστάσεων και επιλογής παρατηρητή) είναι ανεξάρτητα. Αυτή είναι η λεγόμενη αρχή του διαχωρισμού (στην ντετερμινιστική της έκδοση). Παρατηρούμε επίσης ότι οι ιδιοτιμές $\sigma(A + LC)$ που αντιστοιχούν στον παρατηρητή είναι μη-ελέγξιμες απο την εξωτερική είσοδο $r(t)$, δηλαδή:

$$e'(t) = (A + LC)e(t) \Rightarrow e(t) = \exp[(A + LC)t]e(0)$$

Στην πράξη επιλέγουμε τις ιδιοτιμές αυτές $3 - 5$ φορές *πιο γρήγορες* από τις ιδιοτιμές ανάδρασης που αντιστοιχούν στον πίνακα $A+BF$. Αν το (αρνητικό) πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών επιλεγεί υπερβολικά μεγάλο (κατ΄ απόλυτη τιμή) είναι δυνατόν να έχουμε πρόβλημα ευστάθειας λόγω παραμετρικών σφαλμάτων του μοντέλου και άλλων δυναμικών χαρακτηριστικών υψηλών συχνοτήτων που έχουν ενδεχομένως αγνοηθεί.

Παράδειγμα: Έστω σύστημα διπλού ολοκληρωτή: $y'' = u$:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \;\; y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρητής:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1' \\ \hat{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} (y - \hat{y}), \;\; \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

Ανάδραση καταστάσεων:

$$u = f^T x = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = f_1 \hat{x}_1 + f_2 \hat{x}$$

Ορίζουμε μεταβλητές σφάλματος εκτίμησης: $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ και $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
e_1' &= x_1' - \hat{x}_1' = x_2 = \hat{x}_2 + l_1(x_1 - \hat{x}_1) = e_2 + l_1 e_1 \\
e_2' &= x_2' - \hat{x}_2' = u - u + l_2(x_2 - \hat{x}_2) = l_2 e_1 \\
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= f_1 \hat{x}_1 + f_2 \hat{x}_2 = f_1(x_1 - e_1) + f_2(x_2 - e_2) = f_1 x_1 + f_2 x_2 - f_1 e_1 - f_2 e_2
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$x' := \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ e_1' \\ e_2' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & -f_1 & -f_2 \\ \hline 0 & 0 & l_1 & 1 \\ 0 & 0 & l_2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} := A_c x$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I_4 - A_c) = (\lambda^2 - f_2\lambda - f_1)(\lambda^2 - l_2\lambda - l_1)$$

και οι 4 ιδιοτιμές επιλέγονται αυθαίρετα μέσω των παραμέτρων f_1, f_2, l_1 και l_2 εφόσον το συ΄στημα είναι πλύρως ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

6. Το πρόβλημα ρύθμισης σήματος εξόδου

Εκτός από το πρόβλημα σταθεροποίησης δυναμικών συστημάτων υπάρχουν δύο επιπλέον κεντρικά προβλήματα στην Θεωρία Ελέγξου: Το πρόβλημα απόρριψης εξωτερικών διαταραχών (disturbance rejection) και το πρόβλημα παρακολούθησης σήματος αναφοράς (tracking of reference signals). Και τα δύο προβλήματα μπορούν να μελετηθούν σε κοινό πλάισιο.

Έστω σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\
e(t) &= Cx(t) + Qw(t)
\end{aligned}$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος υπό έλεγχο (plant), $u \in \mathbb{R}^m$ η συνάρτηση εισόδου (σήμα ελέγχου) και $w \in \mathbb{R}^r$ το εξωγενές σήμα εισόδου πού αντιστοιχεί στην συνάρτηση διαταραχής (πού επιθυμούμε να απορρίψουμε) η/και στην συνάρτηση αναφοράς (που επιθυμούμε να ακολουθήσουμε με μικρό σφάλμα). Η συνάρτηση $e(t) \in \mathbb{R}^p$ είναι η συνάρτηση σφάλματος της ρύθμισης. Επιθυμούμε να πετύχουμε μηδενικό σφάλμα ρύθμισης *ασυμπτωτικά*, δηλαδή $\lim e(t) = 0$ καθώς $t \to \infty$. Γιά παράδειγμα, για προβλήματα απόρριψης συνάρτησης διαταραχής $w = d$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διαταραχή επιδρά ταυτόχρονα στην είσοδο και την έξοδο του συστήματος (μέσω των πινάκων P και Q αντίστοιχα), ενώ σε πρόβλημα παρακολούθησης σήματος αναφοράς $w = y_{ref}$ μπορούμε να επιλέξουμε $P = 0$ και $Q = -I$. Στην περίπτωση αυτή, ασυμπτωτική σύγκλιση της συνάρτησης σφάλματος στο 0 συνεπάγεται ότι $y(t) - y_{ref}(t) \to 0$, όπου $y(t) = Cx(t)$ η έξοδος του συστήματος. Μεικτά προβλήματα διατυπώνονται επιλέγοντας, για παράδειγμα, μοντέλο της μορφής:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + \begin{bmatrix} P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ y_{ref}(t) \end{bmatrix}, \quad e(t) = Cx(t) + \begin{bmatrix} Q & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ y_{ref}(t) \end{bmatrix}$$

Στην συνέχεια αναλύουμε το πρόβλημα ρύθμισης στην γενική περίπτωση, χωρίς να εξειδικεύουμε στα επιμέρους προβλήματα.

Το σήμα ελέγχου $u(t)$ παράγεται από αντισταθμιστή ανάδρασης που χρησιμοποιεί την πληροφορία που του παρέχει το σύστημα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: (α) Την περίπτωση πλήρους πληροφορίας όπου ο αντισταθμιστής έχει πρόσβαση στις μεταβλητές $x(t)$ και $w(t)$ και η συνάρτηση ελέγχου ορίζεται ως: $u(t) = Kx + Lw$, όπου K και L πίνακες που πρέπει να επιλέξουμε. (β) Ανάδραση σφάλματος: Σε αυτή την (πιό ρεαλιστική) περίπτωση, μόνο η συνάρτηση σφάλματος $e(t)$ είναι διαθέσιμη στον αντισταθμιστή, που ορίζεται ως το δυναμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \xi'(t) &= F\xi(t) + Ge(t) \\ u(t) &= H\xi(t) \end{aligned}$$

με εσωτερικό διάνυσμα κατάστασης $\xi \in \mathbb{R}^{\nu}$. Και στις δύο περιπτώσεις υποθέτουμε ότι το εξωγενές σήμα $w(t)$ παράγεται απο το αυτόνομο σύστημα $w'(t) = Sw(t)$, $t \geq 0$, με αυθαίρατη αρχική κατάσταση $w(0) \in \mathbb{R}^r$. Τα δύο προβλ·ηματα ρύθμισης ορίζονται ως εξής:

Πρόβλημα ρύθμισης με πλήρη πληροφορία: Γιά δοσμένους πίνακες: $\{A, B, C, P, Q, S\}$ να βρεθούν (αν υπάρχουν) πίνακες K και L τέτοιοι ώστε:

($\mathrm{E}_{\pi\pi}$): $\sigma(A + BK) \subseteq \mathbb{C}_-$.

($\mathrm{P}_{\pi\pi}$): Γιά κάθε (x_0, w_0), η λύση $(x(t), w(t))$, $t \geq 0$, του συστήματος:

$$x'(t) = (A + BK)x(t) + (P + BL)w(t), \ \ w'(t) = Sw(t)$$

με αρχική κατάσταση $(x(0), w(0)) = (x_0, w_0)$ ικανοποιεί: $\lim_{t\to\infty}(Cx(t) + Qw(t)) = 0$.

Πρόβλημα ρύθμισης με ανάδραση σφάλματος: Γιά δοσμένους πίνακες: $\{A, B, C, P, Q, S\}$ να βρεθούν (αν υπάρχουν) πίνακες F, G και H τέτοιοι ώστε:

($\mathrm{E}_{\alpha\varsigma}$): Ο πίνακας

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix}$$

ειναι Hurwitz.

($\mathrm{P}_{\alpha\varsigma}$): Γιά κάθε (x_0, ξ_0, w_0), η λύση $(x(t), \xi(t), w(t))$, $t \geq 0$, του συστήματος:

$$x'(t) = Ax(t) + BH\xi + Pw, \ \ \xi'(t) = GCx(t) + F\xi(t) + GQw(t), \ \ w'(t) = Sw(t)$$

με αρχική κατάσταση $(x(0), \xi(0), w(0)) = (x_0, \xi_0, w_0)$ ικανοποιεί: $\lim_{t\to\infty}(Cx(t) + Qw(t)) = 0$.

Υπόθεση Υ1: $\sigma(S) \subseteq \bar{C}_+$, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα S έχουν μη αρνητικό πραγρατικό μέρος.

Η υπόθεση γίνεται χωρίς βλάβη γενικότητας. Αν δεν ισχύει, ο πίνακας S έχει μη τετριμένο ευσταθή αναλλοίωτο υπόχωρο $\mathcal{S}_-$ και αν $w(0) \in \mathcal{S}_-$ τότε $w(t) \in \mathcal{S}_-$ για κάθε $t \geq 0$ και άρα $w(t) \to 0$ καθώς

$t \to \infty$. Αν το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όπως απαιτείται, τότε η συνάρτηση σφάλματος θα τείνει ασυμπτωτικά στο 0 για κάθε $x(0)$ (και $\xi(0)$) και η απαίτηση ασυμπτωτικής ρύθμισης ικανοποιείται αυτόματα λόγω ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Λήμμα: Έστω ότι ισχύει η υπόθεση Υ1. Έστω επιπλέον ότι υπάρχει συνάρτηση ανάδρασης $u = Kx + Lw$ τέτοια ώστε να ισχύει η συνθήκη ($\mathrm{E}_{\pi\pi}$). Τότε η συνθήκη ($\mathrm{P}_{\pi\pi}$) ισχύει επίσης αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας Π που είναι λύση των εξισώσεων:

$$\Pi S = (A + BK)\Pi + (P + BL) \tag{1}$$

$$0 = C\Pi + Q \tag{2}$$

Απόδειξη: Εφόσον $\sigma(S) \subseteq \bar{\mathbb{C}}_+$ και $\sigma(A + BF) \subseteq \mathbb{C}_-$ ισχύει ότι $\sigma(S) \cap \sigma(A + BF) = \emptyset$ και η εξίσωση Sylvester (1) ·εχει μοναδική λύση Π. Ορίζουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\Pi \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \Pi w \\ w \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$\tilde{x}' = (A + BK)(\tilde{x} + \Pi w) + (P + BL)w - \Pi S w = (A + BK)\tilde{x}$$

και

$$e = Cx + Qw = C(\tilde{x} + \Pi w) + Qw = C\tilde{x} + (C\Pi + Q)w$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε στις νέες συντεταγμένες:

$$\tilde{x}(t) = e^{(A+BK)t}\tilde{x}(0), \ \ w(t) = e^{St}w(0)$$

και επομένως:

$$e(t) = Ce^{(A+BK)t}\tilde{x}(0) + (C\Pi + Q)e^{St}w(0)$$

και εφόσον $A+BK$ είναι πίνακας Hurwitz η συνθήκη ($\mathrm{P}_{\pi\pi}$), δηλαδή $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ γιά κάθε $(\tilde{x}(0), w(0))$, ισχύει αν και μόνο αν:

$$\lim_{t\to\infty} (C\Pi + Q)e^{St} = 0$$

πού ισοδυναμεί με την σχέση $C\Pi + Q = 0$ αφού $\sigma(S) \subseteq \bar{\mathbb{C}}_+$. Επομένως η συνθήκη ($\mathrm{P}_{\pi\pi}$) ισχύει αν και μόνο αν η μοναδική λύση της (1) ικανοποιεί την εξίσωση (2). □

Παρατήρηση: Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει την εξής γεωμετρική ερμηνεία: Το σύστημα κλειστού βρόγχου περιγράφεται απο τις εξισώσεις:

$$x'_{cl} = A_{cl}x_{cl}, \ \ x_{cl} = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \ \ A_{cl} = \begin{bmatrix} A + BK & P + BL \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

όπου $A_{cl} \in \mathbb{R}^{(n+r)\times(n+r)}$ έχει n ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}_-$ ($\sigma(A + BK)$) και r ιδιοτιμές στο $\bar{\mathbb{C}}_+$ ($\sigma(S)$). Οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι (δείτε Προκαταρκτικά) είναι:

$$\mathcal{V}_- = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}\right) \ \text{και} \ \mathcal{V}_{+c} = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} \Pi \\ I_r \end{bmatrix}\right)$$

($\mathcal{V}_-$ είναι ο ευσταθής ιδιόχωρος και $\mathcal{V}_{+c} = \mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_c$, όπου $\mathcal{V}_+$ και $\mathcal{V}_c$ ο ασταθής και κεντρικός ιδιόχωρος του πίνακα A_{cl}, αντίστοιχα, και $A + BK = A_{cl}|_{\mathcal{V}_-}$, $S = A_{cl}|_{\mathcal{V}_{+c}}$). Η εξίσωση (1) επομένως λέει ότι υπάρχει A_{cl}-αναλλοίωτος υπόχωρος της μορφής

$$\mathcal{V}_+ = \{(x, w) \in \mathbb{R}^{n+r} : x = \Pi w\}$$

και ότι ο περιορισμός του δυναμικού συστήματος κλειστού βρόγχου στον $\mathcal{V}_+$ δίνεται από το εξω-σύστημα $w' = Sw$. Η εξίσωση (1) λέει οτι η συνάρτηση σφάλματος $e = Cx + Qw$ μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $\mathcal{V}_+$: Εφόσον $(x_0, w_0) \in \mathcal{V}_+$ έχουμε ότι η τροχιά $(x(t), w(t)) \in \mathcal{V}_+$ γιά κάθε $t \geq 0$, και δεν μπορεί να συγκλίνει στο 0 αφού καμία ιδιοτιμή του S δεν έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Επομένως, η συνθήκη $\mathcal{V}_+ \subseteq \mathrm{Ker}(C\Pi+Q)$ είναι αναγκάια για την ασυμπτωτική ρύθμιση της συνάρτησης σφάλματος $e(t)$. Εφόσον κάθε τροξιά του συστήματος προσεγγίζει τον υπόχωρο $\mathcal{V}_+$ καθώς $t \to \infty$ η συνθήκη είναι επιπλέον ικανή.

Γιά το επόμενο Θεώρημα ξρειαζόμαστε την παρακάτω υπόθεση. Η υπόθεση αυτή είναι αναγκαία γιά να ικανοποιείται η συνθήκη ($\mathrm{E}_{\pi\pi}$) για κάποιον πίνακα $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Υπόθεση Υ2: Το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο.

Θεώρημα: Έστω ότι η Υπόθεση Υ1 και Υ2 είναι σε ισχύ. Τότε το πρόβλημα ρύθμισης με πλήρη πληροφορία μπορεί να λυθεί αν και μόνο αν υπάρχουν πίνακες Π και Γ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \tag{3}$$

$$0 = C\Pi + Q \tag{4}$$

Απόδειξη: Η αναγκαιότητα προκύπτει από το προηγούμενο Λήμμα: Γιατί αν υπάρχει λύση στο πρόβλημα ρύθμισης, τότε εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα οι εξισώσεις (1) και (2) ικανοποιούνται για κάποιον πίνακα Π. Θέτοντας: $\Gamma = K\Pi + L$, οι εξισώσεις (1) και (2) ανάγονται στις εξισώσεις (3) και (4).

Αντίστροφα, λόγω της Υ2 υπάρχει $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + BK$ να είναι Hurwitz. Έστω Π και Γ πίνακες που ικανοποιούν τις εξισώσεις (3) και (4). Ορίζουμε:

$$u = \Gamma w + K(x - \Pi w)$$

Θα δείξουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση ελέγχου λύνει το πρόβλημα ρύθμισης. Η συνάρτηση έχει την απαιτούμενη μορφή $u = Kx + Lw$ με $L = \Gamma - K\Pi$. Επίσης η ιδιότητα ευστάθειας ($\mathrm{E}_{\pi\pi}$) ισχύει από την επιλογή του πίνακα K. Από το προγούμενο Λήμμα προκύπτει ότι η ιδιότητα ($\mathrm{P}_{\pi\pi}$) επίσης ισχύει: Εφόσον οι υποθέσεις του Λήμματος ικανοποιούνται, η συνθήκη ($\mathrm{E}_{\pi\pi}$) ισχύει αν οι πίνακες K και L ικανοποιούν τις εξισώσεις (3) και (4) για κάποιον πίνακα Π. Όμως, από την επιλογή του L οι εξισώσεις (3) και (4) ταυτίζονται με τις εξισώσεις (1) και (2) που ικανοποιούνται εξ' υποθέσεως. Επομένως, η συνάρτηση ελέγχου u πού ορί'σαμε επιλύει το πρόβλημα ρύθμισης με πλήρη πληροφορία. □

Παρατήρηση: Αν η Υ2 αντικατασταθεί από την ισχυρότερη υπόθεση ότι το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο, τότε έχουμε πλήρη ελευθερία στην επιλογή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του $A + BK$.

Παρατήρηση: Η εξίσωση (3) υποδηλώνει ότι ο υπόχωρος $\mathcal{V}_+$ είναι (A, B)-αναλλοίωτος υπόχωρος του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} x' \\ w' \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

δηλαδή ότι ο υπόχωρος $\mathcal{V}_+$ γίνεται $\hat{A}$ αναλλοίωτος με την κατάλληλη επιλογή ανάδρασης καταστάσεων $u = \Gamma w$. Η εξίσωση (4) υποδηλώνει, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, ότι αυτός ο (A, B) αναλλοίωτος υπόχωρος ανήκει στον πηρύνα του πίνακα $C\Pi + Q$.

Στήν συνέχεια εξετάζουμε το προβλημα ρύθμισης με ανάδραση σφάλματος.

Λήμμα: Έστω ότι ισχύει η υπόθεση Υ1. Έστω δυναμικός αντισταθμιστής:

$$\xi' = F\xi + Ge$$

$$u = H\xi$$

τέτοιος ώστε η συνθήκη ($\mathrm{E}_{\alpha\varsigma}$) ικανοποιείται. Τότε, η συνθήκη ($\mathrm{P}_{\alpha\varsigma}$) ικανοποιείται επίσης αν και μόνο αν υπάρχουν πίνακες Π και Σ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\Pi S = A\Pi + BH\Sigma + P \tag{5}$$

$$\Sigma S = F\Sigma \tag{6}$$

$$0 = C\Pi + Q \tag{7}$$

Απόδειξη: Ορίζουμε την ακόλουθη εξίσωση Sylvester

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ GQ \end{bmatrix} \tag{8}$$

Από την υπόθεση Υ1 και την συνθήκη ($\mathrm{E}_{\alpha\varsigma}$) η εξίσωση έχει μοναδική λύση Π, Σ. Επιπλέον, οι στήλες του πίνακα

$$M = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \\ I_r \end{bmatrix}$$

είναι βάση του αναλλοίωτου ιδιόχωρου $\mathcal{V}_{+c}$ του πίνακα

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A & BH & P \\ GC & F & GQ \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

που σχετίζεται με τις ιδιοτιμές του πίνακα A_{cl} στο $\bar{\mathbb{C}}_+$. Στην συνέχεια ορίζουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$\tilde{x} = x - \Pi w, \;\; \tilde{\xi} = \xi - \Sigma w$$

Στις νέες συντεταγμένες το σύστημα κλειστού βρόγχου περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{\xi}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\xi} \end{bmatrix}, \;\; w' = Sw \;\text{ και }\; e = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\xi} \end{bmatrix} + (C\Pi + Q)w$$

Από παρόμοια ανάλυση με προηγούμενο Λήμμα συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη ($\mathrm{P}_{\alpha\varsigma}$), δηλαδή $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ για κάθε $(\tilde{x}(0), \tilde{\xi}(0), w(0))$ ισοδυναμεί με την συνθήκη

$$\lim_{t\to\infty} (C\Pi + Q)e^{St} = 0$$

που ισχύει αν και μόνο αν $C\Pi + Q) = 0$. Επομένως, η συνθήκη ($\mathrm{P}_{\alpha\varsigma}$) ικανοποιείται αν και μόνο αν η μοναδική λύση Π, Σ της εξίσωσης (8) ικανοποιεί την εξίσωση (7). Αντικαθιστώντας την τελευταία στην εξίσωση Sylvester (8) επαληθεύει και τις εξισώσεις (5) και (6). □

Παρατήρηση: Η συνθήκη (6) έχει την παρακάτω γεωμετρική ερμηνεία. Έστω ότι οι r στήλες του πίνακα Σ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, που συνεπάγεται ότι $\nu = \dim(\xi) \geq r$. Η εξίσωση (6) υποδηλώνει ότι ο υπόχωρος $\mathcal{W} = \mathcal{R}(\Sigma)$ ειναι F-αναλλοίωτος και ότι $F|\mathcal{W} = S$. Με άλλα λόγια ο αντισταθμιστής που λύνει το πρόβλημα ρύθμισης περιέχει εσωτερικά το εξω-σύστημα S που παράγει την εξωγενή συνάρτηση $w(t)$ που θελουμε να απορρίψουμε η να ακολουθήσουμε με μηδενικό ασυμπτωτικό σφάμα (Αρχή Εσωτερικού Μοντέλου - Internal Model Principle).

Για την επίλυση του προβλήματος ρύθμισης με ανάδραση σφάλματος θα χρειαστούμε την παρακάτω υπόθεση:

Υπόθεση Υ3: Το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι ανιχνεύσιμο.

Για να απλοποιήσουμε την απόδειξη του βασικού Θεωρήματος θα ισχυροποιήσουμε αρχικά την Υπόθεση αυτή (στην Υπόθεση Υ3′).

Υπόθεση Υ3′: Το σύστημα $\Sigma_o(A^e, C^e)$ είναι ανιχνεύσιμο, όπου:

$$A^e = \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} \text{ και } C^e = \begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix}$$

Με χρήση κριτηρίου ανιχνευσιμότητας (π.χ. κριτήριο Hautus) προκύπτει άμεσα ότι $\Upsilon 3' \Rightarrow \Upsilon 3$:

Λήμμα: $\Sigma_o(A^e, C^e)$ ανιχνεύσιμο συνεπάγεται ότι $\Sigma_o(A, C)$ ανιχνεύσιμο.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την ισοδύναμη πρόταση ότι $\Sigma_o(A, C)$ μη-ανιχνεύσιμο συνεπάγεται ότι $\Sigma_o(A^e, C^e)$ μη ανιχνεύσιμο. Πράγματι, αν το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ δεν είναι ανιχνεύσιμο τότε για κάποιο $\lambda \in \sigma(A) \cap \bar{C}_+$ έχουμε

$$\text{Rank}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I_n \\ C \end{bmatrix}\right) < n \Rightarrow \text{Rank}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I_n & P \\ 0 & S - \lambda I_r \\ C & Q \end{bmatrix}\right) < n + r$$

και επομένως $\Sigma_o(A^e, C^e)$ δεν είναι ανιχνεύσιμο. $\square$

Η επίλυση του προβλήματος ρύθμισης με ανάδραση σφάλματος βασίζεται στην Αρχή του διαχωρισμού: Η αρχή αυτή μας επιτρέπει να σταθεροποιήσουμε σύστημα:

$$x' = Ax + Bu, \;\; y = Cx$$

όπου $\Sigma_i(A, B)$ σταθεροποιήσιμο και $\Sigma_o(A, C)$ ανιχνεύσιμο μέσω παρατηρητή ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

(α) Σταθεροποιούμε το σύστημα με ανάδραση καταστάσεων $u = Kx$ έτσι ώστε ο πίνακας $A + BK$ να είναι Hurwitz.

(β) κατασκευάζουμε παρατηρητή: $\xi' = (A - GC)\xi + Gy + Bu$ έτσι ώστε ο πίνακας $A - GC$ να είναι Hurwitz.

(γ) Αντικαθιστώντας το x με το ξ στο βήμα (α) ορίζουμε δυναμική ανάδραση εξόδου:

$$\xi' = (A - GC + BK)\xi + Gy, \;\; u = K\xi$$

που σταθεροποιεί το σύστημα.

Στην περίπτωση του παρόντος προβλήματος υποθέτουμε την ύπαρξη του ζεύγους πινάκων (Π, Γ) που επιλύουν τις εξισώσεις (3) και (4) και ορίζουμε την συνάρτηση εισόδου

$$u = Kx + (\Gamma - K\Pi)w, \;\; \sigma(A + BK) \subseteq \mathbb{C}_-$$

που επιλύει το πρόβλημα ρύθμισης με πλήρη πληροφορία. Η Υπόθεση Υ2 εγγυάται την ύπαρξη του πίνακα K με την παραπάνω ιδιότητα.

Στην συνέχεια, κατασκευάζουμε παρατηρητή, με είσοδο την συνάρτηση σφάλματος e, που εκτιμά την μεταβλητή (x, w) (με μηδενικό ασυμπτωτικό σφάλμα). Ο παρατηρητής ορίζεται απο τις εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} \xi_0' \\ \xi_1' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

όπου επιλέξαμε το ζεύγος (G_0, G_1) έτσι ώστε ο πίνακας:

$$\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix}$$

να είναι Hurwitz. Η Υπόθεση Υ3′ εγγυάται την ύπαρξη του ζεύγους με αυτήν την ιδιότητα. Παρατηρούμε ότι $x - \xi_0 \to 0$ και $w - \xi_1 \to 0$ καθώς $t \to \infty$.

Τέλος, αντικαθιστούμε στον ορισμό της συνάρτησης ελέγχου u τον ρόλο του (x, w) με αυτόν του (ξ_0, ξ_1) θέτοντας

$$u = K\xi_0 + (\Gamma - K\Pi)\xi_1$$

που αντιστοιχεί σε δυναμικό αντισαθμιστή με εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} \xi_0' \\ \xi_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - G_0C + BK & P - G_0Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ -G_1C & S - G_1Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} e \tag{9}$$

$$u = \begin{bmatrix} K & \Gamma - K\Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι ο παραπάνω αντισταθμιστής επιλύει το πρόβλημα ρύθμισης με ανάδραση σφάλματος:

Θεώρημα: Έστω ότι οι υποθέσεις Υ1, Υ2 και Υ3′ είναι σε ισχύ. Τότε το πρόβλημα ρύθμισης με ανάδραση σφάλματος επιλύεται αν και μόνο αν υπάρχουν πίνακες Π και Γ που ικανοποιούν τις εξισώσεις (3) και (4).

Απόδειξη: Όπως και στην περίπτωση του προβλήματος ρύθμισης με πλήρη πληροφορία, η αναγκαιότητα της συνθήκης προκύπτει άμεσα απο προηγούμενο Λήμμα. Θα δείξουμε ότι η συνθήκη είναι και ικανή επληθεύοντας ότι η εξίσωση (9) ικανοποιεί τις συνθήκες ($\mathrm{E}_{\alpha\varsigma}$) και ($\mathrm{P}_{\alpha\varsigma}$). Παρατηρούμε αρχικά ότι ο αντισταθμιστής που ορίσαμε χαρακτηρίζεται από τους πίνακες F, G και H, όπου

$$F = \begin{bmatrix} A - G_0C + BK & P - G_0Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ -G_1C & S - G_1Q \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} \text{ και } H = \begin{bmatrix} K & \Gamma - K\Pi \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$\begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK & B(\Gamma - K\Pi) \\ G_0C & A - G_0C + BK & P - G_0Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ G_1C & -G_1C & S - G_1Q \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό ισοδυναμίας:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A + BK & BK & B(\Gamma - K\Pi) \\ 0 & A - G_0C & P - G_0Q \\ 0 & -G_1C & S - G_1Q \end{bmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι block-διαγώνιος και εκ′ κατασκευής οι ιδιοτιμές των δύο διαγωνίων blocks είναι στο $\mathbb{C}_-$. Επομένως η συνθήκη ($\mathrm{E}_{\alpha\varsigma}$) ικανοποιείται.

Η απόδειξη ότι η συνθήκη ($\mathrm{P}_{\alpha\varsigma}$) επίσης ικανοποιείται χρησιμοποιεί προηγούμενο Λήμμα. Αρκεί να επαληθεύσουμε ότι το ζεύγος πινάκων (Π, Σ) με

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix}$$

επιλύει τις εξισώσεις: (5), (6), (7). Έχουμε:

$$\Pi S = A\Pi + B \begin{bmatrix} K & \Gamma - K\Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix} + P = A\Pi + B\Gamma + P$$

και επομένως η εξίσωση (5) ικανοποιείται γιατί εξ΄ υποθέσεως οι Π και Γ ικανοποιούν την εξίσωση (3). Γιά την εξίσωση (6) έχουμε:

$$\left[\begin{array}{c} \Pi \\ I \end{array}\right] S = \left[\begin{array}{cc} A - G_0C + BK & P - G_0Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ -G_1C & S - G_1Q \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \Pi \\ I \end{array}\right]$$

που με χρήση της εξίσωσης (4) ανάγεται στις:

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi - G_0(C\Pi + Q) + B\Gamma + P = A\Pi + B\Gamma + P \\ S &= -G_1(C\Pi + Q0 + S = S \end{aligned}$$

και επομένως επίσης ικανοποιείται. Τέλος η εξίσωση (7) ταυτίζεται με την (4). $\square$

Γ. Χαλικιάς, 5-6-2022