Ασκήσεις στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Άσκηση 1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t+2y+y^2)+(t+4yt+5y^2)\frac{dy}{dt}=0 \ (1)$$

αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu=\mu(t+y^2)$.

Λύση

Η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα

$$M(t,y)+N(t,y)\frac{dy}{dt}=0$$

όπου, $M(t,y)=3t+2y+y^2$ και $N(t,y)=t+4yt+5y^2$.

Παρατηρούμε ότι,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)=2y+2\neq 1+4y=\frac{\partial N}{\partial t}(t,y)$$

άρα η (1) δεν είναι ακριβής.

Γνωρίζουμε ότι η (1) δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu=\mu(t+y^2)$.

Έστω $u(t,y)=t+y^2$.Τότε από τον **Κανόνα της Αλυσίδας** έχουμε,

- $\frac{\partial\mu}{\partial y}(t,y)=\frac{d\mu}{du}(t,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(t,y)=2y\frac{d\mu}{du}(t,y)$
- $\frac{\partial\mu}{\partial t}(t,y)=\frac{d\mu}{du}(t,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial t}(t,y)=\frac{d\mu}{du}(t,y)$

Αφού η (1) δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα τότε,

$$\frac{\partial(M\mu)}{\partial y}=\frac{\partial(N\mu)}{\partial t}$$

$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial\mu}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial t}+\mu\frac{\partial N}{\partial t}\Leftrightarrow M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial t}=(\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial y})\mu$

$\frac{d\mu}{du}(2yM-N)=(\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial y})\mu\Leftrightarrow\frac{d\mu}{du}(2yt-t+2y^3-y^2)=(2y-1)\mu$

$\frac{\partial\mu}{\partial u}(t+y^2)=\mu\Leftrightarrow\frac{d\mu}{\mu}=\frac{du}{u}\Leftrightarrow\int\frac{1}{\mu}d\mu=\int\frac{1}{u}du+c_1\Leftrightarrow\log|\mu|=\log(|u|\cdot e^{c_1})$

$\mu=\pm ue^{c_1}=\pm e^{c_1}(t+y^2)\Leftrightarrow\mu=c_3(t+y^2)$

Άρα, ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$\mu(t,y)=t+y^2$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα τη σχέση (1).

$(t+y^2)(3t+2y+y^2)+(t+y^2)(t+4yt+5y^2)\frac{dy}{dt}=0$

$(y^4+2y^3+4y^2t+2ty+3t^2)+(t^2+4yt^2+6y^2t+4y^3t+5y^4)\frac{dy}{dt}=0$ (2)

όπου, $\bar{M}(t,y)=y^4+2y^3+4y^2t+2ty+3t^2$ και $\bar{N}(t,y)=t^2+4yt^2+6y^2t+4y^3t+5y^4$.

Έχουμε πως,

$$\frac{\partial\bar{M}}{\partial y}(t,y)=4y^3+6y^2+8yt+2t=\frac{\partial\bar{N}}{\partial t}$$

άρα, η (2) είναι ακριβής.

Άρα, γνωρίζουμε πως υπάρχει $F(t,y) = c$ ώστε,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,y) = \bar{M}(t,y) \ \kappa\alpha\iota \ \frac{\partial F}{\partial y}(t,y) = \bar{N}(t,y)$$

- $\frac{\partial F}{\partial y}(t,y) = \bar{N}(t,y) \Leftrightarrow F(t,y) = \int t^2 + 4yt^2 + 6y^2t + 4y^3t + 5y^4 dy + h(t)$
  $F(t,y) = t^2y + 2y^2t^2 + 2y^3t + y^4t + y^5 + h(t)$
- $\frac{\partial F}{\partial t}(t,y) = \bar{M}(t,y) \Leftrightarrow 2ty + 4y^2t + 2y^3 + y^4 + h'(t) = y^4 + 2y^3 + 4y^2t + 2yt + 3t^2$
  $h'(t) = 3t^2 \Leftrightarrow h(t) = t^3 + c_4$ όπου για $c_4 = 0$ έχουμε,

$$h(t) = t^3$$

Έτσι τελικά προκύπτει πως,

$$F(t,y) = y^5 + ty^4 + 2ty^3 + 2t^2y^2 + t^2y + t^3 = c$$

η οποία είναι λύση σε **πεπλεγμένη μορφή**.

Άσκηση 2.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση [1]

$$y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2t}}{e^t + 1} \ (1)$$

Λύση

Από την σχέση (1) προκύπτει πως η χαρακτηριστική εξίσωση της δ.ε. είναι

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = 2$.

Δηλαδή, η γενικη λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (1) είναι

$$y_{o\mu} = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

Έχουμε πως,

$$y_\epsilon(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{2t}$$

όπου y_ϵ ειδική λύση της (1) και για την εύρεση της πρέπει να λύσουμε το αλγεβρικό σύστημα: [2]

$$e^tc_1'(t) + e^{2t}c_2'(t) = 0$$
$$e^tc_1'(t) + 2e^{2t}c_2'(t) = f(t)$$

Από τον κανόνα του $Cramer$ αφού, $W(e^t, e^{2t})(t) = e^{3t} \neq 0$ τότε,

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2t} \\ -\frac{e^{2t}}{e^t+1} & 2e^{2t} \end{vmatrix}}{W(t)} \ \kappa\alpha\iota \ c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & -\frac{e^{2t}}{e^t+1} \end{vmatrix}}{W(t)}$$

[1] Για την λύση της **Άσκησης 2.** θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο $Lagrange$.

[2] Το παραπάνω **αλγεβρικό σύστημα** προέκυψε αφού η y_ϵ ικανοποιεί την $L[y] = -\frac{e^{2t}}{e^t+1}$.

Δηλαδή, $c_1(t) = \int \frac{e^t}{e^t+1}dt + d_1 = \log(e^t+1) + d_1$ και $c_2(t) = -\int \frac{1}{e^t+1}dt + d_2 = \log(e^{-t}+1) + d_2$
Άρα, προκύπτει πως μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_\epsilon = \log(e^t+1)e^t + \log(e^{-t}+1)e^{2t}$$

Τελικά αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ η γενική λύση της (1) έχει τη μορφή:

$$y(t) = [c_1 + \log(e^t+1)]e^t + [c_2 + \log(e^{-t}+1)]e^{2t}$$

Άσκηση 3.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = e^{3t} \ (1)$$

Λύση

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 + y - 2 = 0 \ (2)$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = -2$.Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται με

$$y_{o\mu}(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t}$$

Το 3 δεν είναι ρίζα της (2) άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = Ae^{3t}$$

και αφού η $y_\epsilon(t)$ ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,
$y_\epsilon''(t) + y_\epsilon'(t) - 2y_\epsilon(t) = e^{3t} \Leftrightarrow 9Ae^{3t} + 3Ae^{3t} - 2Ae^{3t} = e^{3t} \Leftrightarrow A = \frac{1}{10}$.
Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_\epsilon = \frac{1}{10}e^{3t}.$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t} + \frac{1}{10}e^t$$

Άσκηση 4.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = 2e^t \ (1)$$

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 + y - 2 = 0 \ (2)$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = -2$.Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται με

$$y_{o\mu}(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t}$$

Το 1 είναι ρίζα της (2) πολλαπλότητας 1 άρα, μία ειδική λύση της (1) είναι της μορφής:

$$y_\epsilon(t) = Ate^t$$

και αφού ικανοποιέι την (1) έχουμε πως,

$y_\epsilon''(t) + y_\epsilon'(t) - 2\epsilon(t) = 2e^t \Leftrightarrow (2Ae^t + Ae^t) + (Ae^t + Ate^t) - 2Ate^t = 2e^t \Leftrightarrow A = \frac{2}{3}$

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι
$$y_\epsilon(t) = \frac{2}{3}te^t.$$
Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :
$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t} + \frac{2}{3}te^t$$

Άσκηση 5.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t} \ (1)$$

Λύση

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :
$$r^2 + 4r + 4 = 0 \ (2)$$
η οποία έχει λύση $r = 2$ πολλαπλότητας 2.Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται
$$y_{o\mu}(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$$
Το -2 είναι ρίζα της (2) πολλαπλότητας 2 άρα, μια λύση της (1) είναι της μορφής:
$$y_\epsilon(t) = At^2e^{-2t}$$
και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,
$$y_\epsilon''(t) + 4y\epsilon'(t) + 4y_\epsilon(t) = e^{-2t} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$
Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι
$$y_\epsilon(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-2t}$$
Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :
$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t}$$

Άσκηση 6.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y'' + y = 3e^t \ (1)$$

Λύση

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :
$$r^2 + 1 = 0 \ (2)$$
η οποία έχει λύσεις $r_1 = i$ και $r_2 = -i$.Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται :
$$y_{o\mu}(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$$

Το 1 δεν είναι λύση της (2) άρα μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = Ae^t$$

και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$$y_\epsilon''(t) + y_\epsilon(t) = 3e^t \Leftrightarrow A = \frac{3}{2}$$

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{3}{2}e^t$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{3}{2}e^t$$

Άσκηση 7.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = \sin t \ (1)$$

Λύση

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 + 4 = 0 \ (2)$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 2i$ και $r_2 = -2i$.Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται :

$$y_{o\mu}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

Το 1 δεν είναι λύση της (2) άρα μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = A \sin t + B \cos t$$

και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$$y_\epsilon''(t) + 4y_\epsilon(t) = 3e^t \Leftrightarrow A = \frac{1}{3} \ \kappa\alpha\iota \ B = 0$$

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{1}{3} \sin t$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{3} \sin t$$

Άσκηση 8.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y'' + 4y = 3\cos 2t \ (1)$$

Λύση

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :
$$r^2 + 4 = 0 \ (2)$$
η οποία έχει λύσεις $r_1 = 2i$ και $r_2 = -2i$.Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται :
$$y_{o\mu}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$
Το $2i$ είναι λύση της (2), πολλαπλότητας 1 άρα μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :
$$y_\epsilon(t) = t(A\sin t + B\cos t)$$
και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,
$$y''_\epsilon(t) + 4y_\epsilon(t) = 3\cos 2t \Leftrightarrow A = 0 \ \kappa\alpha\iota \ B = \frac{3}{4}$$
Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι
$$y_\epsilon(t) = \frac{3}{4}t\sin 2t$$
Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :
$$y(t) = c_1\cos 2t + (c_2 + \frac{3}{4}t)\sin 2t$$

Άσκηση 9.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y'' + y' + y = t^2 \ (1)$$

Λύση

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :
$$r^2 + r + 1 = 0$$
η οποία έχει λύσεις $r_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ και $r_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται :
$$y_{o\mu}(t) = e^{-\frac{t}{2}}[c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)]$$
Μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :
$$y_\epsilon(t) = At^2 + Bt + C$$
και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,
$$y''_\epsilon + y'_\epsilon + y_\epsilon = t^2 \Leftrightarrow A = 1, \ B = -2 \ \kappa\alpha\iota \ C = 0$$
Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι
$$y_\epsilon(t) = t^2 - 2t$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_{\epsilon}(t)$ ισχύει :

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}[c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)] + t^2 - 2t$$

Άσκηση 10.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = te^t \ (1)$$

Λύση

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 - 1 = 0 \ (2)$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = -1$.Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται :

$$y_{o\mu}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Αφού η $f(t) = te^t$ πάιρνει την μορφή

$$f(t) = e^t[t \cos 0 + Q(t) \sin 0]$$

και το 1 είναι λύση της (2) πολλαπλότητας 1, μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_{\epsilon}(t) = te^t(At + B)$$

και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$$y''_{\epsilon} - y_{\epsilon} = ye^t \Leftrightarrow A = \frac{1}{4} \ \kappa\alpha\iota \ B = -\frac{1}{4}$$

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_{\epsilon}(t) = \frac{1}{4}t^2 e^t - \frac{1}{4}te^t$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_{\epsilon}(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{4}t^2 e^t - \frac{1}{4}te^t$$

[3]

Άσκηση 11.

Να κατασκευαστεί η ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης αν είναι γνωστές $\phi_1(t), \phi_2(t)$, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της.

Λύση

Έστω $\phi_1(t), \phi_2(t) \in C(I)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \ (1)$$

$a(t).b(t) \in C(I)$.

[3]Στις **Ασκήσεις 3-10** για την εύρεση μια ειδικής λύσης της (1) γίνεται χρήση της **Μεθόδου Απροσδιορίστων Συντελεστών**.

Γνωρίζουμε πως η γενική λύση της (1) είναι

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

καθώς και $W(\phi_1(t), \phi_2(t))(t) \neq 0$.

Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$(\phi_1(t), \phi_1'(t), \phi_1''(t)), (\phi_2(t), \phi_2'(t), \phi_2''(t)), (y, y', y'')$$

τα οποία είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Δηλαδή ισχύει ότι,

$$\begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & y \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) & y' \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) & y'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix} y = 0$$

$$W(\phi_1(t), \phi_2(t))(t) y'' - \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix} y = 0,\ W(\phi_1(t), \phi_2(t))(t) \neq 0$$

Άρα, η (1) έχει την μορφή :

$$y'' - \frac{\begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix}}{W(\phi_1(t), \phi_2(t))(t)} y' + \frac{\begin{vmatrix} \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix}}{W(\phi_1(t), \phi_2(t))(t)} y = 0$$