Παράρτημα 1

Έστω X χώρος Banach και $x_1,...,x_n \in X$, $f_1,..., f_n \in X^*$ ώστε $f_k\left(x_\lambda\right)=\delta_{k,\lambda}$, $k,\lambda=1,2,...,n$. Τότε το σύνολο $\left\{\left(x_k\, , f_k\right): k=1,2,...,n\right\}$ λέγεται ότι είναι ένα διορθογώνιο σύστημα στον X . Ένα διορθογώνιο σύστημα $\left\{\left(x_k\, , f_k\right): k=1,2,...,n\right\}$ του X , λέγεται ότι είναι μία Auerbach βάση για τον X αν το $\left\{x_1,...,x_n\right\}$ είναι μια βάση (Hamel) για τον X και επιπλέον ισχύει ότι, $\|x_k\|=\|f_k\|=1$, $k=1,2,...,n$.

Λήμμα (Auerbach) Έστω X χώρος Banach πεπερασμένης διάστασης n. Τότε υπάρχει μια Auerbach βάση στον X .

Απόδειξη Η βασική ιδέα είναι να εντοπίσουμε μια αλγεβρική βάση $e_1,...,e_n$ του X διανυσμάτων νόρμας ίσης με 1 ώστε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου $\left[0,e_1\right]+\left[0,e_2\right]+...+\left[0,e_n\right]$ ($=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k : 0\le\lambda_k\le 1, k=1,2,...,n\right\}$) να είναι μέγιστος. Έστω $x_1,...,x_n$ μια αλγεβρική βάση του χώρου X . Θεωρούμε την απεικόνιση $\left(u_1,...,u_n\right)\in X^n \to \left|\det\left(u_1,...,u_n\right)\right|\in R$, όπου $\det\left(u_1,...,u_n\right)$ είναι η ορίζουσα της οποίας η j στήλη είναι συντεταγμένες του u_j ως προς την βάση $\left\{x_1,...,x_n\right\}$

($u_j=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,j}x_k$, $j=1,2,...n$). Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής και συνεπώς επιτυγχάνει μέγιστη τιμή σε ένα σημείο έστω $\left(e_1,...,e_n\right)$ του συμπαγούς συνόλου $\hat{B}_X\times...\hat{B}_X$.

Επειδή οι ορίζουσες είναι γραμμικές απεικονίσεις των στηλών τους έπεται ότι $\|e_k\|=1$, για κάθε $k=1,2,...,n$. Επίσης παρατηρούμε ότι η $n-$άδα διανυσμάτων $\left(u_1,...,u_n\right)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη αν και μόνο αν $\det\left(u_1,...,u_n\right)\neq 0$. Έτσι η $n-$αδα $\left(e_1,...,e_n\right)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Για κάθε $k=1,2,...,n$ ορίζουμε ένα $e_k^*\in X^*$ ως εξής: $e_k^*\left(x\right)=\dfrac{\det\left(e_1,...,e_{k-1},x,e_k,...,e_n\right)}{\det\left(e_1,...,e_n\right)}$,

$x\in X$. Έπεται εύκολα ότι, $e_k^*\in\hat{B}_{X^*}$ και ότι $e_k^*\left(e_\lambda\right)=\delta_{k,\lambda}$, για $k,\lambda=1,2,...,n$. Επομένως το σύνολο $\left\{\left(e_k,e_k^*\right): k=1,2,...,n\right\}$ είναι μία βάση Auerbach για τον X .

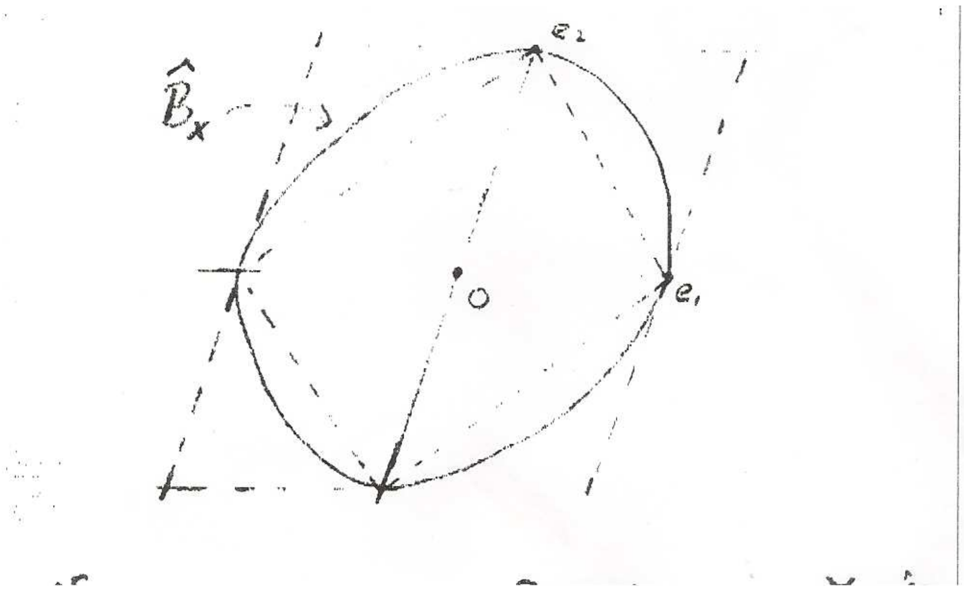
Παρατηρήσεις: Μια αναδιατύπωση του λήμματος του Auerbach είναι ότι αν X είναι ένας χώρος Banach διάστασης n, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός $T: X\to R^n$ ώστε (1) $\|T(x)\|_\infty\le\|x\|\le\|T(x)\|_1$ για κάθε $x\in X$.

(Πράγματι, αν $\left\{\left(e_k, e_k^*\right) : k = 1, 2, \dots, n\right\}$ είναι μια βάση Auerbach για τον X και $x \in X$ τότε $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ και άρα $\|x\| \le \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|e_k\| \le \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$. Επίσης για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ έχουμε $|\lambda_k| = |e_k^*(x)| \le \|e_k^*\| \cdot \|x\| = \|x\|$, επομένως $\max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} \le \|x\|$.Θέτομε

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

Παρατηρούμε ότι η (1) ισοδυναμεί με το ότι, (2) $T\left(\hat{B}_{\ell_1^n}\right) \subseteq \hat{B}_X \subseteq T\left(\hat{B}_{\ell_\infty^n}\right)$

Όπου $\hat{B}_{\ell_1^n}$, $\hat{B}_{\ell_\infty^n}$ είναι οι κλειστές μοναδιαίες σφαίρες των ℓ_1^n, ℓ_∞^n, αντίστοιχα. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι σε ένα χώρο Banach διάστασης n, μπορεί να επιλεγεί ένα σύστημα συντεταγμένων $e_1, \dots, e_n$ ώστε η $conv(\pm e_1, \dots, \pm e_n)$ να περιέχεται στην $\hat{B}_X$ η οποία με τη σειρά της περιέχεται στον κύβο $[-e_1, e_1] + \dots + [-e_n, e_n]$.



<u>Πόρισμα</u> Έστω X χώρος Banach και Y ένας $n-$διάστατος υπόχωρος του X. Τότε υπάρχει μια γραμμική προβολή $P : X \to Y \subseteq X$ ώστε $\|P\| \le n$.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $\left\{\left(e_k, e_k^*\right) : k = 1, 2, \dots n\right\}$ μια βάση Auerbach του X. Επεκτείνουμε κάθε e_k^* (με την βοήθεια του θεωρήματος Hahn-Banach) σε ένα στοιχείο του S_{X^*} διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό. Κατόπιν ορίζουμε την απεικόνιση

$$P : X \to Y : P(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k \ , \ x \in X \ .$$

Παρατηρούμε ότι η P είναι πράγματι μια προβολή και $\|P(x)\| \le n\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

<u>Παρατήρηση</u> Το προηγούμενο αποτέλεσμα επιδέχεται ουσιαστική βελτίωση. Έτσι μπορεί να αποδειχθεί ότι αν Y είναι υπόχωρος του χώρου Banach X με $\dim Y = n$, τότε υπάρχει προβολή $P : X \to Y \subseteq X$ ώστε $\|P\| \leq \sqrt{n}$. (Θεώρημα Kadec- Snobar, δες το [F-H-H-M-Z]σελίδα 320.)