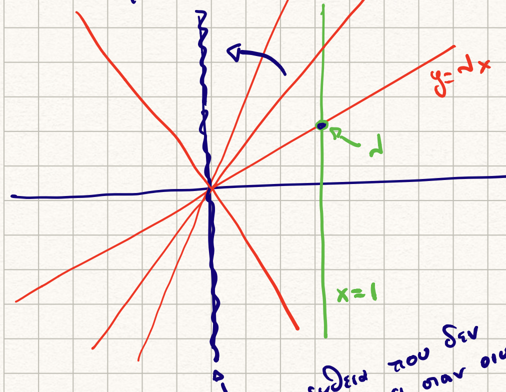
Αλγεβρική Γεωμετρία 3/3/2021.

Προβολικά σύνολα τυπικός ορισμός $\mathbb{P}^1_k = k \cup \{\infty\}$



ευθεία που δεν ανήκει σταν οικογένεια $y = \lambda x$

Οι ευθειες του επιπέδου είναι της μορφης $y = \lambda x + \beta$ χανουμε μια ευθεία.

$\underline{ax + by = 0}$ Ευθειες του επιπέδου

$a = 1,\ \ b = 0$ Υποχωροι διάστασης 1 στο επιπεδο

„ $x = 0$ "

Το συνολο των ευθειων $ax + by = 0$ περιεχει και το „$\lambda = \infty$"

$ax + by = 0$ ειναι ο ιδιος δ. υποχωρος με τον $\lambda ax + \lambda by = 0$ $\lambda \neq 0$

Συνολο Ευθειων ειναι σε 1-1 - επι κατοια με τα $\underline{(a, b) \in k^2 \setminus \{(0,0)\}}$ $\sim$

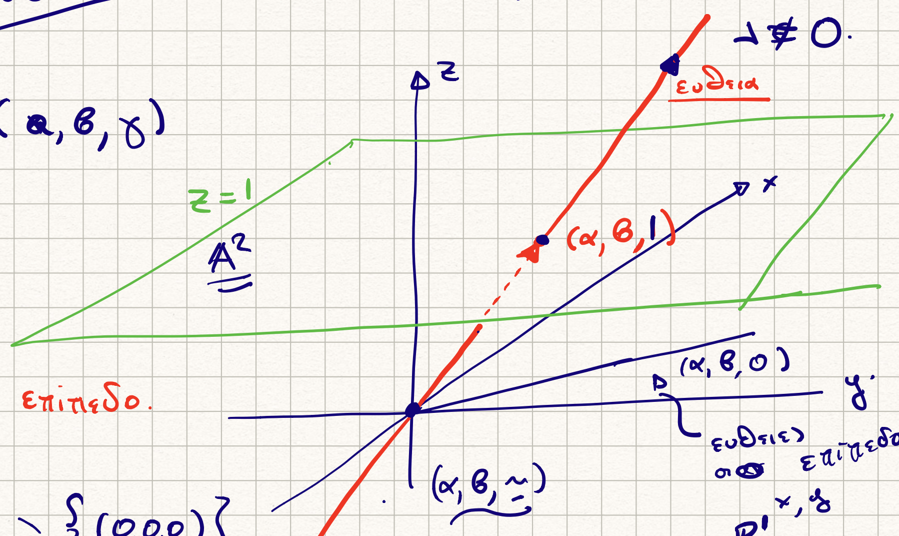
$\underline{0x + 0y = 0}$

$(a, b) \sim (a', b')$ αν οριζουν την ιδια ευθεια

σχεση ισοδυναμιας αν και μονο αν $(a, b) = \lambda (a', b')$ $\lambda \neq 0$.

Το συνολο τυπικως ονομαζεται προβολικη ευθεία

$A^3_k = (a, b, \gamma)$



$Ax + By + \Gamma z = 0$ επιπεδο.

$(\alpha, \beta, \gamma) \in k^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

Οριζει την ευθεια $\lambda(\alpha, \beta, \gamma)$ $\lambda \in k$

$A^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$\mathbb{P}^2_k = {}^{n+1}_{\;k} / \sim$ $\qquad (\alpha,\beta,\gamma) \sim (\alpha',\beta',\gamma') \iff$

$$(\alpha,\beta,\gamma) = \lambda(\alpha',\beta',\gamma')$$

$\underline{(\alpha,\beta,\gamma)} \sim \underline{\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1\right)}$ αρκεί $\gamma \neq 0$

$\underline{[\alpha:\beta:\gamma]}$ = κλάση ισοδυναμίας της (α,β,γ) αντιπρ. της κλάσης

$\;\;\|$

$\left[\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\beta}{\gamma} : 1\right]$ αρκεί $\gamma \neq 0$

$$\mathbb{P}^2_k = \underbrace{\{[\alpha,\beta,\gamma] : \gamma \neq 0\}}_{\substack{\updownarrow\ 1-1 \text{ επί} \\ \mathbb{A}^2}} \cup \{[\alpha,\beta,0]\}$$

$\mathbb{P}^1_k = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$

ευθεία στο άπειρο

$$\underbrace{\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^{n+1} - \{(0,\dots,0)\} / \sim}_{\text{χώρος των ευθειών στο } \mathbb{A}^{n+1}}$$

$(\alpha_0,\dots,\alpha_n) \sim (\alpha_0',\dots,\alpha_n')$

$\iff \exists \lambda \in k \setminus \{0\}$ $(\alpha_0,\dots,\alpha_n) = \lambda(\alpha_0',\dots,\alpha_n')$

χώρος Grassmann ο χώρος των υποχώρων διάστασης k στο $n+1$.

Γενίκευση: $G_{n,k}$

$\mathbb{P}^n_k \qquad U_j = \{[\alpha_0:\dots:\alpha_n] \in \mathbb{P}^n_k : \alpha_j \neq 0\}$

$j = 0,1,\dots,n.$

$U_j \xleftrightarrow{1-1 \text{ επί}} \mathbb{A}^n_k$

$[\alpha_0,\dots,\alpha_j,\dots\alpha_n] = \left[\frac{\alpha_0}{\alpha_j} : \frac{\alpha_1}{\alpha_j} : \dots : \underset{j\text{ θέση}}{1} ; \dots : \frac{\alpha_n}{\alpha_j}\right]$

$\downarrow$

$\mathbb{A}^n_k \ni \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_j}, \frac{\alpha_1}{\alpha_j}, \dots \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}, \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_j}\right)$

$\boxed{\mathbb{P}^n_k = \bigcup^n U_j}$

$$\dots k \dots \bigcup_{j=0} \dots U_j$$

$j<k$ χωρίς π. της γενικότητας

$$\Phi_{jk} = \Phi_j^{-1}\circ\Phi_k : \underbrace{\Phi_k^{-1}(U_j\cap U_k)}_{\parallel} \longrightarrow \Phi_j^{-1}(U_j\cap U_k)$$

$U_j\cap U_k$ είναι το σύνολο των σημείων με δυο τους στοιχείων μη μηδενικές συν/νες).

$$\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n_k \quad \underline{a_{j+1}\neq 0}\} \qquad \parallel \qquad \{(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{A}^n_k \quad b_k\neq 0.\}$$

ανοιχτό στην τοπολογία Zariski.

$$\mathbb{A}^n_k \ni (a_1,\dots,a_n) \xrightarrow{\Phi_k} [a_1:\dots:a_k:\overset{j}{1}:a_{k+1}:\dots:a_n] =$$

$$\left[\frac{a_1}{a_{j+1}}:\dots:\frac{a_j}{a_{j+1}}:\underset{j}{\cancel{1}}:\frac{a_{j+2}}{a_{j+1}}:\dots:\frac{1}{a_{j+1}}:\frac{a_{k+1}}{a_{j+1}},\dots,\frac{a_n}{a_{j+1}}\right]$$

$$\Big\downarrow \Phi_j^{-1}$$

$$\left(\frac{a_1}{a_{j+1}},\dots,\frac{a_j}{a_{j+1}},\frac{a_{j+2}}{a_{j+1}},\dots,\frac{1}{a_{j+1}},\frac{a_{k+1}}{a_{j+1}},\dots,\frac{a_n}{a_{j+1}}\right) \in \mathbb{A}^n_k$$

Δακτύλιος συντεταγμένων του $U_j = k[x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}]$

$$\Phi_{j,k} : \underline{D(x_{j+1}^{(k)})}\subset\mathbb{A}^n_k \longrightarrow D(x_k^{(j)})\subseteq\mathbb{A}^n_k$$

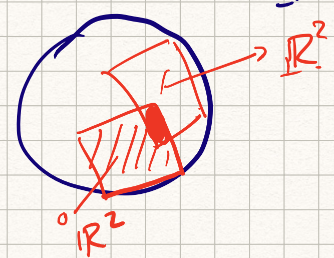
$$k[x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)},\frac{1}{x_k^{(j)}}] \xleftarrow{\Phi_{jk}^{*}} k[x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)},\frac{1}{x_{j+1}^{(k)}}]$$

$$\mathbb{A}^n_k\cong U_j\supset D_{jk}\xleftrightarrow{\cong} D_{kj}\subset U_k\cong\mathbb{A}^n_k$$

Σχηματίζω ένα χώρο που προκύπτει από κολλήματα των $\mathbb{A}^n_k$

Διαφορικημως πολ/τας στην αλγεβρικη γεωμετρια.

$\underline{M}$ προκυπτει ως κολλημματα $\mathbb{R}^n$ $\longrightarrow$ $\underline{\mathbb{A}^n_k}$ $\underline{k\text{-γενικό}}$



<u>Ομογενή πολυώνυμα</u>

$$f(x_0,\dots,x_n) = \sum_{\underline{k_0+\dots+k_n}=m} a_{k_0,\dots,k_n} \underbrace{x_0^{k_0}\cdots x_n^{k_n}}_{\text{μονονυμα}} \qquad a_{k_0,\dots,k_n}\in k$$

Παραδειγμα $p(x,y,z) = \underline{3xy^2 + 5z^3 + 6xyz + 7x^2y}$ ομογενες.

$\underline{x^7 + yx}$ δεν είναι ομογενες. $\underline{\lambda^7x^7 + \lambda^2yx}$

$$p(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n) = \lambda^m p(x_0,\dots,x_n)$$

$$p(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \lambda^3 p(x,y,z).$$

Με ομογενη πολυωνυμα απαντάμε στο εξης ερωτημα.

$$f(\underline{[\alpha_0,\dots,\alpha_n]}) := f(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$$

$$f([\lambda\alpha_0,\dots,\lambda\alpha_n]) := \lambda^m f(\alpha_0,\dots,\alpha_n) \qquad m=\deg f$$

δεν ήταν καλα ορισμενο.

f ομογενες

Αν $f([a_0;\dots;\alpha_n]) = 0 \overset{\text{τοτε}}{\Longleftrightarrow} f([\lambda a_0;\dots;\lambda\alpha_n]) = 0$

<u>Ορισμο</u> Αν $f_1,\dots,f_r$ ομογενη πολυωνυμα τοτε

$\mathbb{P}^n_k \supset V(f_1,\dots,f_r) = \{[a_0:\dots:a_n] \in \mathbb{P}^n_k : \underline{f([a_0:\dots:a_n])} \quad \forall f \in \overline{\langle f_1,\dots,f_r \rangle}\}$

f ← ομογενές

Εστω $f_1,\dots,f_m$ ομογενή πολυώνυμα και εστω I το ιδεώδες που παράγεται από αυτά.

$f \in I$ διασπάται ως εξής

$$\boxed{f = f_d + f_{d+1} \dots + f_m}$$

τα f_d είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού d, $\in I$

Δηλαδή ένα $f \in I$ ← που παράγεται από ομογενή πολυώνυμα έχει ομογενής προσθεταίους που όλοι ανήκουν στο ιδεώδες.

$$f = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r$$

$f_1,\dots,f_r$ ομογενή.
το f δεν είναι ομογενές

$g_1,\dots,g_r$ διασπάται σε άθροισμα μονονύμων

$$g_1 = \underline{xy} + \underline{x^3y^7} + \underline{x^6}$$

$g_i = \sum_j g_{i,j}$ άθροισμα μονονύμων $\underbrace{x_0^{a_0}\dots x_n^{a_n}}_{\text{μονόνυμο}}$

$$f = \sum_{i=1}^{r} \sum_j g_{i,j} f_i$$

$f_i \to \in I$, $g_{i,j} f_i \to I$

Αρκεί να συγκεντρώσουμε μαζί τα ομογενή πολυώνυμα ίδιου βαθμού

__Ορισμός__ Ένα ιδεώδες που παράγεται από ομογενή πολυώνυμα θα λέγεται ομογενές.

__Πρόταση__ Ένα ιδεώδες I (k - άπειρο σώμα) είναι ομογενές αν και μόνο αν κάθε $\underline{f \in I}$ διασπάται ως άθροισμα ομογενών πολυωνύμων το καθένα από αυτά είναι στοιχείο του I.

Αποδ.

I ομογενες $\qquad f \in I \Rightarrow f = \underbrace{f_d + \dots f_k}$

ομογενων πολυωνύμων που ανηκουν στο I

Αντιστροφως I ο δακτυλιος $k[x_0, \dots, x_n]$ ειναι Noether $\Rightarrow$ καθε ιδεωδες ειναι πεπ. παραγομενο απο τα $f_1, \dots, f_r \in I$

$$f_i = \sum_{j=1}^{s_i} f_{i,j} \quad \text{ομογενη}, \ f_{i,j} \in I.$$

$$I \supseteq \langle f_{i,j} \rangle \supset \langle f_1, \dots, f_r \rangle = I$$

$f_{i,j} \in I \qquad f_{i,j} \Rightarrow f_i$

$I = \langle f_{i,j} \rangle$ παραγεται απο ομογενη ιδεωδη και ειναι ομογενες

$$I \trianglelefteq k[x_0, \dots, x_n] \longrightarrow V(I)$$

$$V(I) = V(\sqrt{I})$$

Αν I ομογενες και το $\sqrt{I}$ ομογενες.

$f \in \sqrt{I} \qquad \boxed{f = \sum_{d \in D} f_d}^{\,m} \qquad f_d$ ομογενη βαθμου d

Αρκει να δειξουμε ότι $f_d \in \sqrt{I}$

$\exists m \in \mathbb{N}$

$f^m \in I$

$$f^m = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_r = m} \binom{m}{\nu_1, \dots, \nu_r} f_{d_1}^{\nu_1} \cdots f_{d_r}^{\nu_r}$$

$$\binom{m}{\nu_1, \dots, \nu_r} = \frac{m!}{\nu_1! \cdots \nu_r!}$$

$(a + \beta + \gamma + \delta)^m = .$

Εστω f_d το ομογενες κομματι του f. μεγιστου βαθμου.

$$I \ni f^m = \underbrace{f_d^m}_{m \deg f_d} + \underbrace{\text{ομογενη πολυωνυμα μικροτερου βαθμου}}$$

$$\Rightarrow f_d^m \in I \Rightarrow f_d \in \sqrt{I}$$

$$f \in \sqrt{I},\ f_d \in \sqrt{I} \qquad f - f_d \in \sqrt{I}$$

ως αθροισμα ομογενων πολυωνυμων μικροτερου βαθμου επαναλαμβανουμε την διαδικασια.

V προβολικο συνολο δηλαδη $[a_0, \dots, a_n] \in V$
$[\lambda a_0, \dots, \lambda a_n] \in V$.

$$I(V) = \{ f \in k[x_0, \dots, x_v] : f(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = 0 \quad \forall [a_0 : \dots : \alpha_v] \in V \}$$

Το $I(V)$ ειναι ομογενες.

$$f \in I(V) \qquad f = f_d + f_{d-1} + \dots + f_r$$

αθροισμα ομογενων πολυωνυμων.

$$0 = f(a) \Rightarrow f(\lambda \alpha) = 0$$

$$0 = \lambda^d \overbrace{f_d(\alpha)}^{\in k} + \lambda^{d-1} \overbrace{f_{d-1}(\alpha)}^{\in k} + \dots + \lambda^r \overbrace{f_r(\alpha)}^{\in k}.$$

$\forall \lambda \in k$. k απειρο σωμα. $\}$ πολυωνυμο με απειρες ριζες

αρα ειναι το μηδενικο πολυωνυμο.

$$f_d(\alpha) = f_{d-1}(\alpha) = \dots = f_r(\alpha) = 0 \quad \forall a \in V$$

$$\Rightarrow f_d, f_{d-1}, \dots, f_r \in I(V).$$

$f_1,\dots,f_r$ ομογενη πολυώνυμα. $k[x_0,\dots,x_n]$

$I(f_1,\dots,f_r) \triangleleft k[x_0,\dots,x_n]$

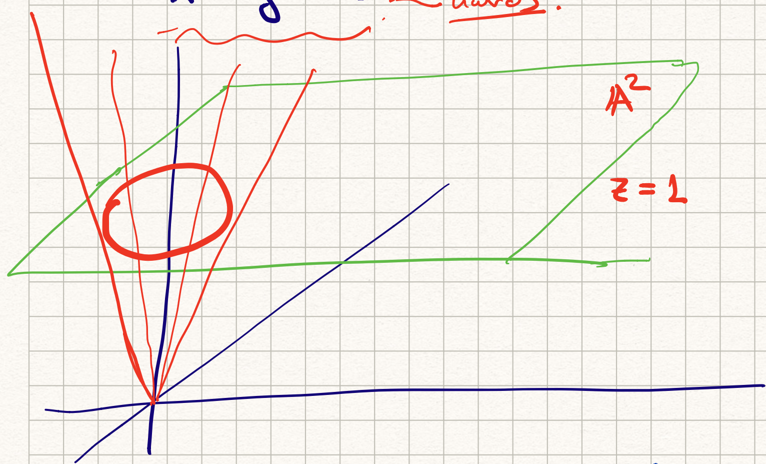
αφινικος κωνος.

$\rightarrow$ $\boxed{\text{αλγεβρικο σύνολο στο } \mathbb{A}_k^{n+1}}$

$\rightarrow$ προβολικο σύνολο στο $\mathbb{P}_k^n$

$x^2+y^2=z^2$ κωνος.

$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=z^2 \\ z=1 \end{array}\right\} \quad x^2+y^2=1$



Αλγεβρικο συνολο $V(y^2=x^3+x+1)\subset \mathbb{A}_k^2$

$y^2-x^3+x+1 \xrightarrow{\text{ομογενοποιηση}} y^2z-x^3+xz^2+z^3$

μη ομογενες πολυωνυμο $\rightsquigarrow$ ομογενες.

$y=\frac{Y}{Z}, \quad x=\frac{X}{Z} \qquad \left(\frac{Y}{Z}\right)^2-\left(\frac{Y}{Z}\right)^3+\frac{Y}{Z}+1.$

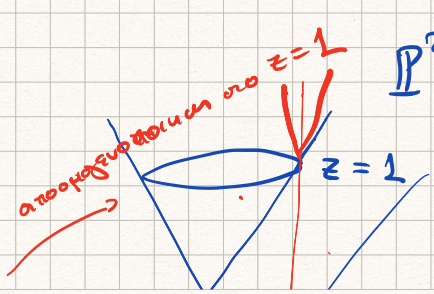
$$=\left[\frac{1}{Z^3}\left(\underbrace{Y^2Z-Y^3+YZ^2+Z^3}_{\text{ομογενοποιημενο.}}\right)\right]$$

$\underline{Z\neq 0}$

$x^2+y^2=1$

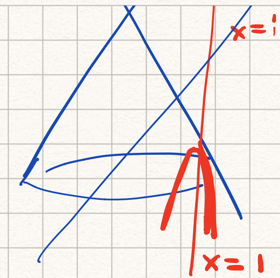
$x^2+y^2=z^2$

$\mathbb{P}^2$ $\quad U_1, U_2, U_3.$



$x^2+y^2=z^2$

$x^2 + y^2 = z^2$



υπερβολη

$1 + y^2 = z^2$

$1 = z^2 - y^2$

Στην προβολική γεωμετρία οι κωνικές τομές είναι όλες ισοδύναμες.

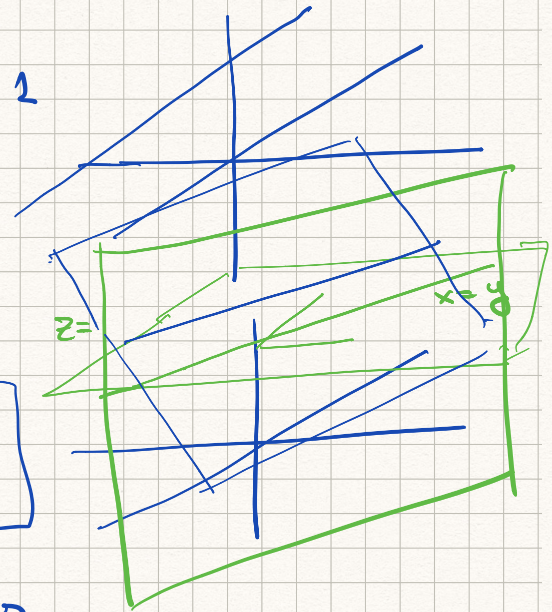
Τομή στο ∞

παράλληλες ευθείες

$y = x + 1$

$y = x$

Δεν τέμνονται στο επίπεδο.
Τέμνονται στο ∞.



$$\mathbb{A}^2_k \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$$

$y = x + 1 \rightsquigarrow y = x + z$

$y = x$ — $y = x$

αδύνατο

τομή είναι η λύση του συστήματος

$z = 0$ $\quad y = x$ σημείο στο ∞

$[1:1:0] \notin \mathbb{A}^2$

$[2:2:0]$

$[\lambda:\lambda:0]$

$(\lambda,\lambda,0) \sim (1,1,0)$

Bezout $f(x,y,z)$ ομογενές πολυώνυμο βαθμού m

$g(x,y,z)$ ——//—— n

$$V(f(x,y,z)) \cap V(g(x,y,z)) = nm$$

αρκεί το k να είναι αλγεβρικά κλειστό.

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

τέσσερα σημεία τομής