Αλγεβρική Γεωμετρία 3 Ιουνίου 2021

Moduli space: Χώρος του οποίου τα σημεία είναι κλάσεις ισομορφισμών αλγεβρικών καμπυλών γένους $g \geq 1$

($g=0$ σημείο)

Η έκφραση ενός moduli προβλήματος δίνεται από ένα συναρτητή ο οποίος θα θέλαμε να είναι αναπαραστάσιμος (αλλά δεν είναι)
→ Ορίζοντας γενικότερα γεωμετρικά αντικείμενα
→ Αλλάζοντας λίγο το moduli πρόβλημα
→ Εξασθενώντας την απαίτηση για representability.

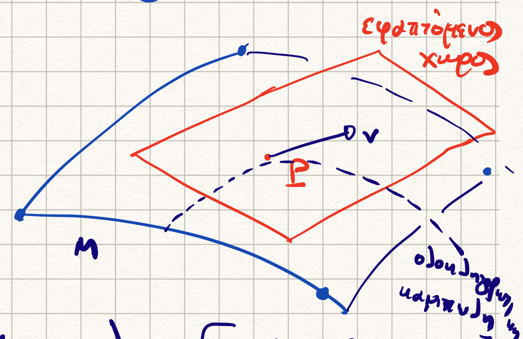
Deformation Theory.

Εφαπτόμενος χώρος: γραμμική προσέγγιση του αλγεβρικού συνόλου

↓

γνωρίζει κρυφά πράγματα για το σύνολο πολ/τα.

(γόνιμη αντιμετ. και ευκολότερη Lie Groups → Lie algebras)



$$\left[\begin{array}{l} \gamma:[-1,1] \to M \\ \gamma'(0)=v \end{array}\right]$$

Ολοκληρωτική καμπύλη στο moduli space: Οικογένεια καμπυλών γένους g.

Θεωρία διαταραχών: Λύση ενός προβλήματος / Μαθηματικό αντικείμενο } → „απειροστή" μεταβολή.

Deformation of complex manifolds Kodaira - Spencer
(αλγεβρικών πολ/των πάνω από το $\mathbb{C}$)

Grothendieck: να αναπτύξει τα εργαλεία για να γίνει deformation θεωρία σε κάθε σώμα.

R: Noether: Κάθε αύξουσα ακολουθία ιδεωδών γίνεται τελικά σταθερή ⟺ ισοδύναμα κάθε ιδεώδες είναι πεπ. παραγόμενο

Artin: Κάθε φθίνουσα ακολουθία ιδεωδών

Artin : Κάθε φθίνουσα ακολουθία
γίνεται τελικά σταθερή.

Artin $\Rightarrow$ Noether

$k[x]$. Noether (κάθε ιδεώδες είναι κύριο)
άρα πεπ. παραγόμενο

αλλά όχι Artin

$\mathfrak{m} = \langle x \rangle$

$$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \mathfrak{m}^3 \supset \mathfrak{m}^4 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}^n \supset \mathfrak{m}^{n+1} \supset \cdots$$

άπειρη φθίνουσα ακολουθία ιδεωδών.

$$\mathfrak{m}^n = \{ f(x) \in k[x] ,\ x^n \mid f(x) \}$$

$$\overset{\neq}{\mathfrak{m}^{n+1}} = \{ f(x) \in k[x] ,\ x^{n+1} \mid f(x) \}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = \{0\}$$

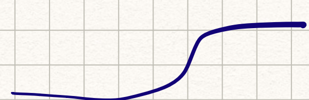
Artin-Rees lemma
Το οποίο λέει ότι σε Noether
τοπικούς δακτυλίους $\bigcap \mathfrak{m}^n = \{0\}$

$R = C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ~~αυτός~~ δεν είναι δακτύλιος της Noether

$$\mathfrak{m} = \{ f \in R \quad f(0) = 0 \}$$

$$\mathfrak{m}^n = \{ f \in R ,\ f(0) = f'(0) = \cdots = f^{n}(0) = 0 \}$$

$\bigcap \mathfrak{m}^n \neq \{0\}$



$$\begin{cases} e^{-x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Artin

$k[x]/(x^2)$ δακτύλιος των δυϊκών απειροστών.

$\uparrow$

$k[\varepsilon]$

$\uparrow$ Δακτύλιος του Artin.

$\varepsilon^2 = 0$

10^{-10}

$(10^{-10})^2 = 10^{-100}$

$k[x]/(x^2)$ $\quad \langle x\rangle \supseteq \langle x^2\rangle \supseteq \langle x^3\rangle$
$$\underline{\underline{\langle x^2\rangle}} = 0$$

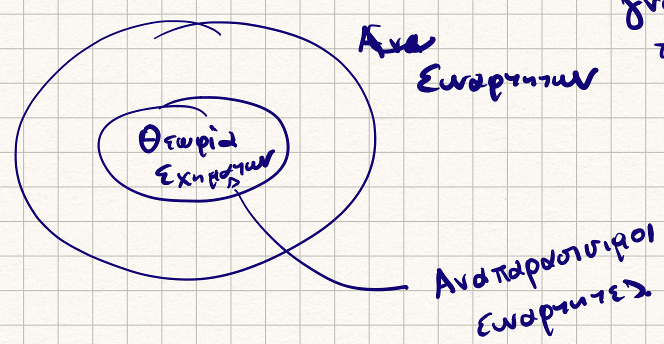
$k[x]/(x^n)$ $\quad \langle x\rangle \supseteq \langle x^2\rangle \supseteq \langle x^3\rangle \supseteq \cdots \langle x^n\rangle = 0.$

Αντιμεταθετική Άλγεβρα: παίζει τον ρόλο του απειροστικού Λογισμού.

Grothendieck

X σχήμα $\rightsquigarrow$ $h_X(\cdot)$ συναρτητές

αυτός ο συναρτητής γνωρίζει τα πάντα για το σχήμα



$X \rightsquigarrow$ Εφαπτόμενος χώρος Zariski

$$h_X(\mathrm{Spec}\, k[\varepsilon]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Spec}\, k[\varepsilon], X)$$

Αν ένας συναρτητής F δεν είναι αναπαραστάσιμος

$$T_F = F(k[\varepsilon]) \qquad \underbrace{F(\mathrm{Spec}\, k[\varepsilon])}$$

Αν F είναι ο moduli συναρτητής θέλουμε $F(\mathrm{Spec}\, k[\varepsilon])$ να το δούμε σαν τον εφαπτόμενο χώρο.

Διαφορική Γεωμετρία εφαπτόμενο χώρο σε σημείο.

$\mathrm{Spec}\, k \to \mathrm{Spec}\, k[\varepsilon] \longrightarrow X$ περιέχει και την

πληροφορια
του σημειου

Spec R

$$\underbrace{k \xleftarrow{\bmod \varepsilon} k[\varepsilon] \xleftarrow{\ \varphi\ } R}_{\text{μας δινει και το σημειο}}$$

Γιατί το $F(k[\varepsilon])$ είναι δ.χ. ; Δεν είναι και πρέπει να βάλουμε μια συνθήκη.

(fiber product) $\underline{k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]} \xrightarrow{\ +\ } k[\varepsilon]$

$$(x \oplus y_1 \varepsilon,\ x \oplus y_2 \varepsilon) \longrightarrow x \oplus (y_1 + y_2)\varepsilon$$

(T_k) C F ικανοποιει την συνθηκη εφαπτόμενου χώρου αν

$$h : F(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} \underbrace{\underset{\text{συνολο}}{F(k[\varepsilon])} \times \underset{\text{συνολο}}{F(k[\varepsilon])}}_{\text{καρτεσιανο γινομενο συνολων.}}$$

F : Rings $\longrightarrow$ Sets.

$$\begin{array}{ccccc} t_F \times t_F & \longrightarrow & t_F & & \\ \| & & & & \\ F(k[\varepsilon]) \times F(k[\varepsilon]) & \xrightarrow{h^{-1}} & F(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{F(+)} & F(k[\varepsilon]) \end{array}$$

Πραξη της προσθεσης και ειναι καλα ορισμενη

Διανυσματικος χωρος.

Fiber product δακτυλιων

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[ddl, bend right, "f_A"'] \arrow[ddr, bend left, "f_B"] \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\ & A \times_C B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

δεν ειναι το τανυστικο γινομενο

Το fiber product affine schemes $\to$ καταληγει σε tensor product δακτυλιων

Ακριβως το fiber product στη κατηγορια των δακτυλιων.

Στην κατηγορία των δακτυλίων υπάρχει fiber product

$$A \times_C B = \{ (a, b) \in A \times B \; : \; \alpha(a) = \beta(b) \}$$

συνολοθεωρητικό γινόμενο

δακτύλιος με κατά συντεταγμένες πράξεις

υποδακτύλιος

A, B, C δακτύλιοι Noether
ο $A \times_C B$ μπορεί να μην είναι δακτύλιος Noether.

A, B, C δακτύλιοι Artin $A \times_C B$ είναι δακτύλιος του Artin

Deformation: $X \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ όπου ο R να είναι τοπικός δακτύλιος του Artin.

infinitesimal περιοχή.

$$\operatorname{Spec} k[x]/\langle x^n \rangle = \langle x \rangle$$ Μοναδικό σημείο (και απειροστή πληροφορία στον δακτύλιο)

$\mathcal{C}$ κατηγορία των τοπικών δακτυλίων του Artin που είναι k-άλγεβρες

$\hat{\mathcal{C}}$ κατηγορία των complete δακτυλίων του Artin.

Σειρές Taylor: $a_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + \dots$

Πολυώνυμα πεπερασμένες σειρές.

$f(x) \bmod x \quad a_0$

$\frac{f(x) - \alpha_0}{x} \bmod x \overset{\text{υπολ.}}{\rightsquigarrow} \alpha_1 \qquad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$

$$\frac{f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1 x)}{x^2} \rightsquigarrow \alpha_2 .$$

Αποκόμματα σειρών Taylor. ⟶ Δακτύλια του Artin $k[x]/\langle x^4 \rangle$

Τυπικές δυναμοσειρές $k[[X]]$ – $\sum \alpha_i x^i$ (Δεν μας ενδιαφέρει η σύγκλιση)

τις οποίες πολ/με τυπικά.
προσθέτουμε.

$$\left(\sum a_i x^i\right)\left(\sum b_i x^i\right) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \left(a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2\right) x^2 + \cdots$$

Συγκλίνουσες δυναμοσειρές ⇝ Algebraizable.

Complete δακτύλιος : τοπολογία Krull. Τοπικό δακτύλιο R με m.
Αρκεί να περιγράψουμε βάση ανοικτών σε κάθε σημείο.
τοπολογικός δακτύλιος ($+$, $\cdot$ συνεχείς).
αρκεί να περιγράψουμε την βάση ανοιχτών στο 0.

π.χ. 0

Βάση ανοιχτών στο 0 είναι τα $\{m^i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

και είναι πλήρης
Cauchy ⇒ συγκλίνουσα.

Complete ~~ως~~ τοπικό δακτύλιο.

Τυπικές δυναμοσειρές είναι complete τοπικοί δακτύλιοι.

$\mathbb{Z}_p$ p-αδικοί αριθμοί (complete δακτύλιοι)