Αλγεβρικη Γεωμετρια 25/2/2021

Αλγεβρικο σύνολο : $\underset{\shortparallel}{V(I)}$ $\quad I \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ σώμα

$$P \in \mathbb{A}^n_k = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in k\}$$

$$f(\underline{P}) = 0 \quad \forall f \in I$$

Θεωρημα βάσης του Hilbert

$I \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ ειναι πεπερασμενα παραγμενο

$$I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$$

$$V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$$

$$\bigcap V(I_\lambda) = V\Big(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\Big)$$

Nullstellensatz Hilbert $\quad I \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$,

k αλγεβρικα κλειστο

$1 \notin I \Leftrightarrow I \subsetneq \underline{R}$

$$V(I) \neq \emptyset$$

$$\sqrt{I} = \{ f \in k[x_1, \dots, x_n] \text{ ωστε } \exists\, m \in \mathbb{N} \;\; f^m \in I \}$$

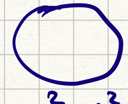
$I \subset \sqrt{I}$ $\qquad f \in I \qquad m = 1 \qquad f \in I$

$\Rightarrow f \in \sqrt{I}$

Έστω V ένα αλγεβρικο σύνολο $\mathbb{A}^n_k$

$$I(\underline{V}) = \{ \underbrace{\overset{\text{ιδεωδες}}{f \in k[x_1, \dots, x_n]} \text{ ώστε } f(\underline{P}) = 0 \;\; \forall P \in V}_{\text{πολυώνυμα τα οποια μηδενιζονται στο } V.} \}$$

'Αρχη : Αντι να μελετησαμε ενα συνολο (αλγεβρικο) θα μελετήσουμε τις συναρτήσεις πανω σε αυτο το σύνολο.

$V \subset \mathbb{A}^n_k$ $\qquad$  $\qquad f : \mathbb{A}^n_k \longrightarrow k$

f πολυωνυμο

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

συναρτησεις απο το $V \to k$ $\qquad 0 \qquad f \in k[x_1,\dots,x_n]$

Πολυωνυμικες συναρτησεις

$$f|_V : V \longrightarrow \mathbb{A}^n_k \qquad\qquad f|_V = g|_V \qquad \Downarrow \; \underline{f, g}$$

ποτε ο περιορισμος δινει την ιδια συναρτηση στο V.

$$f - g \in I(V) = \left\{ F \in k[x_1,\dots,x_n] : \underline{F(P) = 0 \;\; \forall P \in V} \right\}$$

Δακτυλιος των συναρτησεων στο V

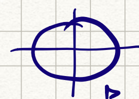
$$R_V = k[x_1,\dots,x_n] \big/ I(V) \quad \longleftarrow \quad \underline{\text{Δακτυλιος πηλικο}}$$

Θεωρημα $\quad$ <u>k αλγ. κλειστο</u>

$$J \lhd k[x_1,\dots,x_n] \qquad\qquad I(V(J)) = \sqrt{J} \supset J$$

Παραδ.

$$J = \langle f^2 \rangle \qquad V(J) =$$



$$f = \underline{(x^2+y^2-1)^2}$$

αλγεβρικο ξεχναει το τετραγωνο.

$$(\underline{x^2+y^2-1}) \in \underline{I(V(J))}$$

$$\boxed{\sqrt{J} \subset I(V(J))} \qquad \text{αν} \quad \underline{f \in \sqrt{J}} \quad \text{τοτε}$$

εξ ορισμου του ριζικου

$$\underline{f^m \in J} \qquad \underline{f^m(P) = 0} \qquad \underline{\forall P \in V(J)}$$

ορισμος του $V(J)$

$$\Downarrow$$

$$\underline{f(P) = 0 \qquad \forall P \in V(J)} \qquad \underline{k \text{ σωμα}}$$

$$f \in I(V(J)).$$

Αντιστροφως εστω $\underline{f \in I(V(J))}$ θα δειξουμε οτι $\underline{f \in \sqrt{J}}$ δηλαδη οτι $f^m \in J$ για καποιο $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccc} k[x_0, x_1,\dots,x_n] & \supset & k[x_1,\dots,x_n] \\ \cup & & \cup \\ \tilde{J} & & J \end{array}$$

$\shortparallel$

$\langle 1 - x_0 f, J \rangle$

Αν το $V(\tilde{J}) \neq \emptyset$ τοτε υπαρχει $(a_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(\tilde{J}) \subset \mathbb{A}_k^{n+1}$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(J)$ $J \subset \tilde{J}$ $\rightsquigarrow V(\tilde{J}) \subset V(J)$

Αρα $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$

$1 - x_0 f_1(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{J}$

$0 = 1 - a_0 f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$, ατοπο $\Rightarrow V(\tilde{J}) = \emptyset$

Nullstellensatz $1 \in \tilde{J} \Rightarrow \tilde{J} = k[x_0, \dots, x_n]$

$$1 = g_0(x_0, \dots, x_n) \cdot (1 - x_0 f(x_1, \dots, x_n)) + \sum_{j=1}^{\ell} g_j(x_0, \dots, x_n) f_j(x_1, \dots, x_n)$$

$x_0 \longrightarrow 1/f$

$$1 = g_0\left(\frac{1}{f}, x_1, \dots, x_n\right)\left(1 - \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)}\right) + \sum_{j=1}^{\ell} g_j\left(\frac{1}{f}, x_1, \dots, x_n\right) f_j(x_1, \dots, x_n)$$

$\to 0$

παρανομαστες ειναι το f σε διαφορετικες δυναμεις

$$f^N = \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} g'_j(x_1, \dots, x_n) f_j(x_1, \dots, x_n)}_{J}$$

αριθμητες

για κάποιο N φυσικο

τα f_j ειναι οι πεπ. το πληθος γεννητορες του J

$\Rightarrow f \in \sqrt{J}$

Ορισμος Ένα ιδεωδες θα λεγεται reduced αν $\sqrt{J} = J$.

Καθε αλγεβρικο συνολο μπορει να παραχθει με reduced ιδεωδη.

$\frac{x^2+1}{x-1}$

Τα non-reduced ιδεωδη ειναι χρησιμα σε προβληματα διαταραχων $\rightsquigarrow$ μετρημα πολ/των.

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - p_i)$$

$V(f) \subset \mathbb{A}^1_k$

$(x^2+y^2-1)^2 = 0 \leftarrow$ διπλός κύκλος

$(x-t)(x-1) \quad t \neq 1$

$t = 1$

$(x-1)^2$

διπλή ρίζα

$\mathbb{A}^n_k \supset V \supset W \quad (a) \quad I(V) \subset I(W)$

(β) $V(J_1) = V \supsetneq W = V(J_2)$

τότε $\sqrt{J_1} \subsetneq \sqrt{J_2}$

$f \in I(V) \quad f(P) = 0 \quad \forall P \in V \supset W$

$f(P) = 0 \quad \forall P \in W \Rightarrow f \in I(W)$

Υποθέσαμε

$V(J_1) = V \supsetneq W = V(J_2)$

$\sqrt{J_1} = I(V(J_1)) \subset I(V(J_2)) = \sqrt{J_2}$

Αν $\sqrt{J_1} = \sqrt{J_2}$ τότε θα είχαμε $V = W$

Πρόταση Θεωρούμε το σύνολο των συμπληρωμάτων όλων των αλγεβρικών συνόλων

$$\mathcal{T} = \{ V(I)^c : I \triangleleft k[x_1, \dots, x_n] \}$$

τότε το $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο $\mathbb{A}^n_k$

(1) $\emptyset, \mathbb{A}^n_k \in \mathcal{T}$

(2) Αν $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$

(3) $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T} \quad \mathcal{O} \in \mathcal{T}$

Zariski

(3) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in J$. $\quad O_\lambda \in J$

$$V(k[x_1,\dots,x_n]) = \emptyset \longrightarrow \emptyset^c = \mathbb{A}^n_k$$
$$V(\{0\}) = \mathbb{A}^n_k \longrightarrow (\mathbb{A}^n_k)^c = \emptyset$$
κλειστά και ανοιχτά

$$O_1 \cap O_2 = V(I_1)^c \cap V(I_2)^c = \left(\overline{V(I_1)\cup V(I_2)}\right)^c = V(I_1 \cap I_2)^c$$

πεπ. τομές ανοιχτών είναι ανοιχτά

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)^c = \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)\right)^c = V\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\Big)^c$$

$\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$

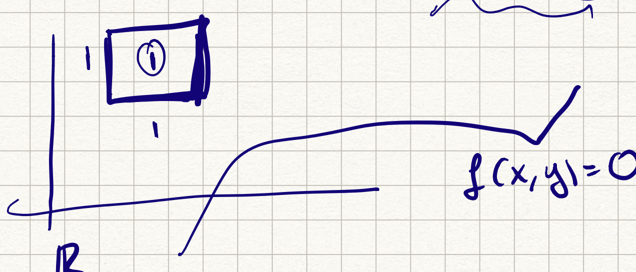
Τα ανοιχτά της τοπολ. Zariski είναι μεγάλα.

$V(f_1,\dots,f_n) \leftarrow$ μέτρου 0 $\quad \subset V(f_1)$

$f_1(x_1,\dots,x_n) = 0$

κλειστό στην κανονική τοπολογία του $\mathbb{R}^n$

$f^{-1}(\{0\})$ συνεχής ως πολυωνυμική



Zariski έχει μεγάλα ανοιχτά και μικρά κλειστά.

Δεν είναι Hausdorff $\quad \mathbb{A}^1_k \quad k$ άπειρο σύνολο.

$0 \quad 1$

Τα ανοιχτά είναι συμπληρώματα κλειστών $V(f) =$ πεπερασμένα σημεία.

Ανοιχτά είναι $\to \mathbb{A}^1_k \setminus$ πεπερασμένα σημεία $= \mathcal{U}$

$\to \mathbb{A}^1_k \setminus$ πεπ. σημεία $= V \ni 0$

$\mathbb{A}^2_k = \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k$ καρτεσιανό γινόμενο τομή

αφελές γινόμενο

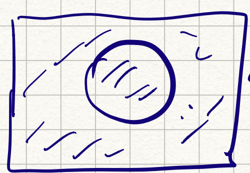
Η τοπολογια Zariski στο $\mathbb{A}^2_k$ δεν ειναι το γινομενο των τοπολογιων $\mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k$

$X \times Y$

T_X $\quad T_Y$

ανοιχτα $U = U_1 \times U_2$

$\mathbb{A}^2_k$ $\quad V(x^2+y^2-1)^c$ ειναι ανοιχτο



$\mathbb{A}^1_k$ τα ανοιχτα ειναι $\mathbb{A}^1_k - \{\text{πεπ. σημεια}\}, \emptyset, \mathbb{A}^1_k$

$\mathbb{A}^1_k \longrightarrow$ Στην τοπολογια γινόμενο τα ανοιχτα ειναι $\mathbb{A}^2_k \setminus \{\text{πεπ. σημεια}\}$

Γινομενο: Το κατηγορικο γινομενο,

Προταση Αν $V(I)$ δεν ειναι ούτε $\emptyset$ ούτε $\mathbb{A}^n_k$ τοτε το $V(I)^c$ δεν ειναι αλγεβρικο σύνολο.

Αποδ. Εστω $J \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ $\quad V(I)^c = V(J)$

$$V(I) \cup V(J) = \mathbb{A}^n_k$$
$$\parallel$$
$$V(I \cap J) \Rightarrow$$

$$I(V(I \cap J)) = I(\mathbb{A}^n_k) = \{0\}$$

$$I \cap J \subset \sqrt{I \cap J}$$

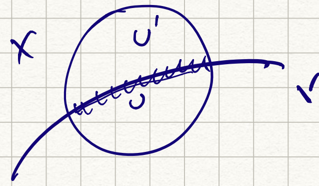
Αν $I \neq \langle 0 \rangle$ δηλαδη $V(I) \neq \emptyset, \mathbb{A}^n_k$

$J \neq \langle 0 \rangle$

$\exists\, f \in I,\ g \in J \quad f, g \neq 0 \qquad f \cdot g \in I \cap J = \{0\}$

Ακ. περιόχη $k[x_1, \dots, x_n]$ άτοπο

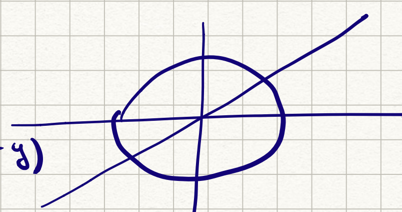
$V(I) \subset \mathbb{A}^n_k$ η τοπολογία Zariski στο $V(I)$ είναι η επαγόμενη.



$Y \subset X$ επαγόμενη $\tilde{U} \subset Y$ ώστε υπάρχει ανοιχτό $U' \subset X$

$U = Y \cap \tilde{U}'$

$$(x^2+y^2-1)(x-y)=0$$



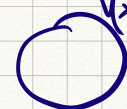
$$V((x^2+y^2-1)(x-y)) = \underline{V(x^2+y^2-1) \cup V(x-y)}$$

__Ορισμός__ Ένα αλγεβρικό σύνολο $V \subset \mathbb{A}^n_k$ θα λέγεται reducible (μη-αναγωγο) αν και μόνο αν

$$V = V_1 \cup V_2 \qquad V_1 \neq V, \quad V_2 \neq V$$

αλγεβρικά σύνολα μικρότερων.

Διαφορετικά θα λέγεται ανάγωγο.



$\mathbb{A}^n_k$

Έστω $V = V(J) = \underline{V(J_1) \cup V(J_2)}$

$V(J_1) \neq V(J)$

$V(J_2) \neq V(J)$

$$V(J) \supsetneq V(J_i)$$

$$\sqrt{J} = I(V(J)) \subsetneq I(V(J_i)) = \sqrt{J_i}$$

άρα υπάρχουν $f_1 \in J_1$, $f_2 \in J_2$ με $f_1, f_2 \notin \sqrt{J}$

με $f_1 f_2$ να μηδενίζεται στο $V(J)$ $f_1 f_2 \in \sqrt{J}$

Δηλαδή το $\sqrt{J}$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες.

A πρώτο

$f \cdot g \in A \Rightarrow f \in A$ ή $g \in A$.

$(x^2+y^2-1)^2$ Δεν είναι πρώτο

$(x^2+y^2-1) = \sqrt{(x^2+y^2-1)^2}$ είναι πρώτο.

Πρόταση ένα αλγεβρικό σύνολο είναι ανάγωγο αν και μόνο αν $I(V)$ είναι πρώτο ιδεώδες.

Αν V δεν είναι ανάγωγο το $I(V)$ δεν είναι πρώτο.

Έστω V ανάγωγο και $I(V)$ όχι πρώτο. Συνεπώς υπάρχουν $f_1, f_2 \notin I(V)$ και $f_1 f_2 \in I(V)$.

$$J_1 = \langle I(V), f_1 \rangle \qquad J_2 = \langle I(V), f_2 \rangle.$$

$$\underline{f_i} \notin \underline{I(V)} \Rightarrow V(J_1) \subsetneq V$$
$$V(J_2) \subsetneq V.$$

$$f_1 f_2 \in I(V) \quad \forall P \in V \quad (f_1 \cdot f_2)(P) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$f_1(P) = 0 \text{ ή } f_2(P) = 0$$

$$\Rightarrow P \in V(J_1) \cup V(J_2)$$

$$V = V(J_1) \cup V(J_2)$$ ένωση δύο γνήσια μικρότερων υποσυνόλων.

V αλγεβρικό σύνολο

$$k[V] = k[x_1, \dots, x_n] / I(V).$$ δακτύλιο συντεταγμένων

Πόρισμα $\underbrace{V \text{ ανάγωγο}}_{\text{γεωμετρική έννοια}}$ αν και μόνο αν $\underline{k[V] \text{ ακέραια περιοχή}}$.

Κατηγορίες αντικειμένων

Αντικείμενα, συναρτήσεις

Διανυσματικοί χώροι, γραμμικές απ.

Ομάδες, ομομορφισμούς ομάδων

Μορφισμοί αλγεβρικών συνόλων

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^m_k & & \mathbb{A}^n_k \\ \cup & & \cup \\ V & \xrightarrow{\phi} & W \\ P & & \end{array}$$

Η φ θα λέγεται μορφισμός αλγεβρικών συνόλων αν υπάρχουν πολυώνυμα $f_j \in k[x_1,\dots,x_m]$ $\quad j=1,\dots,n$

$$\forall P=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in V$$

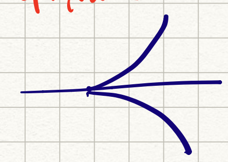
$$\Phi(P)=(b_1,\dots,b_n)=\big(f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_m),\dots\dots,f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\big)$$

$$\Phi(P)\in W$$

τα πολυώνυμα $f_1,\dots,f_n$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

Παράδειγμα

$$C=V(y^2-x^3)\in \mathbb{A}^2_k$$



$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow C \in \mathbb{A}^2_k$$

$$a \longrightarrow (a^2,a^3)=(b_1,b_2) \qquad b_1^3-b_1^2=0$$

$$\Phi : V \longrightarrow W$$

$$\Phi^{\#} : k[W] \longrightarrow k[V]$$

δακτύλιοι συντεταγμένων.