Αλγεβρικη Γεωμετρία 18/5/2021

Γινομενο $X \times_Z Y$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\
X \arrow[dr, "p"'] & X \times_Z Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y \arrow[dl, "q"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

$f : X \longrightarrow Y$

$y \in Y$

$X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y) =$ "$f^{-1}(y)$"

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & y \arrow[dl, "i"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Spec} k(y)$

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_Y \{y\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & y \arrow[dl, "i"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

$\cong \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} x \in X \\ y \in \{y\} \end{array} \quad f(x) = i(y) \right\}$

$\|$ Ορισμος του (ινωδους) γινομενου στην κατηγορια των συνολων.

$f^{-1}(y)$

Οικογενεια με παραμετρο „t"

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} k[t] \end{array}$$

$X = \operatorname{Spec} k[\underbrace{x, y}_{\text{γεωμετρικες μεταβλητες}}, \overset{\text{παραμετρος}}{t}] \,/\, \langle f(x,y,t) \rangle$

$k[t] \longrightarrow k[x,y,t] \,/\, \langle f \ldots t \rangle$

$k[x,y,t]$

$\operatorname{Spec} k[t]$ ← χώρου παραμέτρου

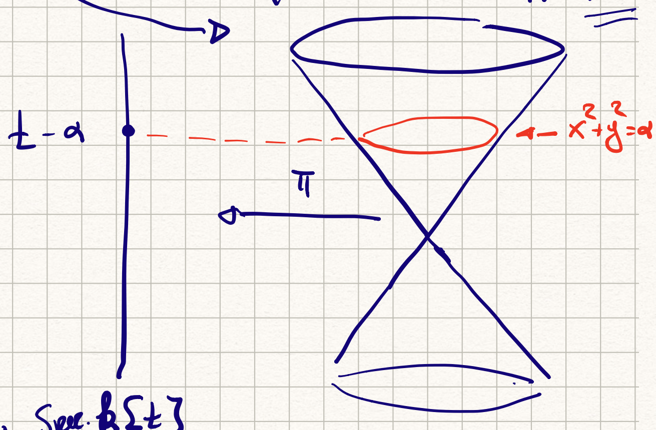
$$\operatorname{Spec} \frac{k[x,y,t]}{\langle x^2+y^2-t\rangle} \qquad x^2+y^2=t$$

οικογένεια κύκλων.

$\downarrow$

$\operatorname{Spec} k[t]$

αφινικό σχήμα $k=\mathbb{R}$



X_a

$a \leftrightarrow \langle t-a\rangle$

$\operatorname{Spec} k[t] = \mathbb{A}^1$ k αλγεβρικά κλειστό $\operatorname{Spec} k[t]$

πρώτα ιδεώδη του $k[t]$

$t-a$ ← πρώτα ιδεώδη

$\mathbb{R}$

$\underbrace{at^2+bt+c}$ $a,b,c\in\mathbb{R}$

$b^2-4ac<0$

$k(a)$

$\uparrow$

$t-a$

$$\operatorname{Spec}\left(\frac{k[x,y,t]}{\langle x^2+y^2-t\rangle} \otimes_{k[t]} \frac{k[t]}{\langle t-a\rangle}\right)$$

Λήμμα τανυστικά γινόμενα

M R-module

$I \triangleleft R$

$$M \otimes_R R/I \cong \frac{M}{I\cdot M}$$

$\operatorname{Spec} \frac{k[x,y]}{\ldots}$

$$\mathrm{Spec}\ \frac{\ \ \ }{\langle x^2+y^2=\alpha\rangle} = \text{Προσωρινά } \pi^{-1}(\alpha)$$

$$\underline{\mathbb{A}^1} \qquad \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$$

$$k[t] \longleftrightarrow \mathbb{Z}$$

$$x^2+y^2=r \qquad r\in\mathbb{Z}$$

$$X = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[x,y]\big/(x^2+y^2=r)$$

αριθμητική επιφάνεια.

$$\dim_{Krull} \mathbb{Z}[x,y]\big/\langle x^2+y^2=r\rangle = 2$$

$$\downarrow$$

$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ ⇝ ευθεία γραμμή διάσταση 1.

Έστω p πρώτος του $\mathbb{Z}$ $\quad \langle p\rangle \triangleleft \mathbb{Z}$

$$X_{\langle p\rangle} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}[x,y]\big/(x^2+y^2=r) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$$

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Spec}\left(\mathbb{F}_p[x,y]\big/\langle x^2+y^2=r\rangle\right)$$

"κύκλος" στο πεπ. σώμα $\mathbb{F}_p$

Όσο τα p διατρέχουν το $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ έχουμε μια οικογένεια

Ίνα: αναγωγή της εξίσωσης mod p.

Οι ίνες μπορεί να έχουν περίεργη συμπεριφορά.

$$X = \mathrm{Spec}\ k[x,y,t]\big/\langle x^m y^n - t\rangle \longrightarrow \mathrm{Spec}\ k[t]$$

$a \in k \rightsquigarrow \langle t-a \rangle$ **Specialization**

$$X_a = \operatorname{Spec} k[x,y]/\langle x^m y^n - a \rangle$$

$a=0$ το το X_0 δεν είναι reduced $m,n \geq 2$

k αλγεβρικά κλειστό σώμα X_a $\cdot$(αν $p \nmid m\, n$) είναι reduced αλλά αλλά όχι ανάγωγο.

$$\underbrace{x^m y^n}= a \overset{p \mid m,\ p \mid n}{=} \left(x^{m/p} y^{n/p} - \sqrt[p]{a}\right)^p \quad \text{όχι reduced.}$$

τις n ιμη ρίζες του a και να παραγοντοποιούμε

P generic point $k(t)$

$$X_p = \frac{k(t)[x,y]}{(x^m y^n - t)}$$

$m,n > 2$ είναι reduced και ανάγωγο. (το $t \in k(t)$ δεν έχει ρίζες)

αυτό το πολυώνυμο δεν παραγοντοποιείται

$$f: \operatorname{Spec} k[u,v] \longrightarrow Y = \operatorname{Spec} k[x,y]$$

$$k[x,y] \longrightarrow k[u,v]$$

$$f(x,y) \longrightarrow f(u,uv)$$

$$x \longrightarrow u$$

$$y \longrightarrow uv$$

$$\langle x-a, y-b \rangle \in \operatorname{Spec} k[x,y]$$

το σώμα υπολοίπων του σημείου $k[x,y]/\langle x-a, y-b \rangle \cong k$

$$k[u,v] \otimes_{k[x,y]} k[x,y]/\langle x-a,\, y-b\rangle \cong k[u,v]/\langle u-a,\, uv-b\rangle$$

$a=0$ $\qquad k[u,v]/\langle u, uv-b\rangle \cong k[$

αντιστρέψιμο

$$\langle u - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{a},\, uv-b\rangle = \langle u,\, uv-b\rangle = \langle 1\rangle \overset{b\neq 0}{=} R$$

$$\langle u, uv-b \rangle = \langle u\rangle \quad b=0$$

$$X_{(0,b)} = \emptyset$$

$$X_{(0,0)} = \operatorname{Spec} k[u,v]/\langle u\rangle \cong \operatorname{Spec} k[v]$$

$a\neq 0$ $\qquad X_{(a,b)} = \operatorname{Spec} k[u,v]/\langle \underline{u-a},\, \underline{v = b/a}\rangle$

σημείο.

Ορισμός. $X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ $\qquad \bar{k}$ αλγεβρική κλειστότητα.

$$\underline{X \times_k \bar{k}}$$

Η αρχική καμπύλη στην οποία έχουμε επεκτείνει το σώμα ορισμού από το k στο $\bar{k}$

$$\underbrace{M \otimes_R S}_{\text{δακτύλιος}} = \text{"extension of scalars"}$$

M: R-module, R: δακτύλιος

$$R \hookrightarrow S$$

X = affine $\qquad X = k[x,y]/\langle f(x,y)\rangle$

$$X \times_k \bar{k} = \operatorname{Spec}\left(k[x,y]/\langle f(x,y)\rangle \otimes_k \bar{k} \right)$$

$$\bar{k} \quad \mathbb{C} \quad = \operatorname{Spec}\left(\bar{k}[x,y]/\langle f(x,y)\rangle \right)$$

από ένα variety ορισμένο υπέρ του k

$$k \qquad \mathbb{R} \qquad \begin{array}{c}\overline{\mathbb{Q}} \\ / \\ \mathbb{Q}\end{array} \Bigg\}$$

ένα από τα περίεργα μυστήρια και ενδιαφέροντα μαθηματικά αντικείμενα.

$(f(x,y))$

ανάγωγο σε ένα ορισμένο υπερ του $\bar{k}$.

X ανάγωγο $\qquad X \times_k \bar{k}$ αν αυτό είναι ανάγωγο τότε το X λέγεται γεωμετρικά ανάγωγο.

$x^2+y^2=r$ είναι γεωμετρικά ανάγωγο. $r \neq 0$.

$\mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}$

$x^2+y^2=0$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}$ αλλά όχι στο $\mathbb{C}$

$(x-iy)(x+iy)$

"Γεωμετρικά" $\rightsquigarrow$ reduced, ακέραιο, irreducible. $\Big] \rightsquigarrow X \times_k \bar{k}$.

Γινόμενα: Δίνουν ίνες extension of scalars.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd} \qquad g : T \longrightarrow S$$

$$\begin{tikzcd} & X \times_S T \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y \times_S T \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "q'"] & \\ Y & & T \end{tikzcd}$$

$$S \qquad\qquad\qquad S$$

$f\circ p$

$$\begin{tikzcd}
& X\times_S T \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "f_T"] \arrow[dr, "q"] & \\
X \arrow[d, "f"'] & Y\times_S T \arrow[dl, "p'"] \arrow[r, "q'"] & T \arrow[ddl, dashed] \\
Y \arrow[dr, dashed] & & \\
& S &
\end{tikzcd}$$

Covariant συναρτηση

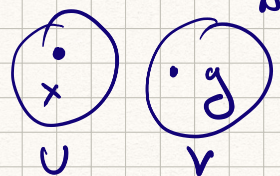
$$\left(Sch/_S\right) \longrightarrow \left(Sch/_T\right) \qquad \boxed{\text{Base Change}}$$

$$X \longmapsto X\times_S T$$

$$f \in Hom_S(X,Y) \longrightarrow f_T \in \underline{Hom_T(X\times_S T, Y\times_S T)}$$

<u>Seperated μορφισμου</u>   <u>Διαχωρισμενος</u>

Τοπ. Zariski έχει πολύ λίγα ανοιχτα, δεν έχει την ιδιότητα Hausdorff.



$U\cap V=\emptyset$

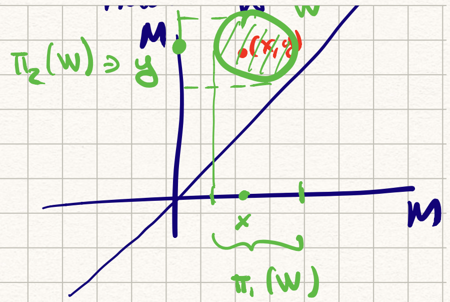
Παρατηρηση   M τοπολ. χωρος είναι Hausdorff...

$\Delta = \{(a,a) \in M\times M,\ a\in M\}$

είναι κλειστή στο $M\times M$

$x\neq y$ $\quad (x,y)\in M\times M$ δεν ανήκει στην διαγώνιο.

Αν η διαγώνιος είναι κλειστή τότε το συμπλήρωμα της είναι ανοιχτό



$\pi_1(W)\cap\pi_2(W)=\emptyset$

ανοιχτές περιοχές των x, y

Αντιστρόφως αν ο τόπος είναι Hausdorff τότε η διαγώνιος είναι κλειστή

αφού αν $U\ni x$, $V\ni y$ τότε $U\times V$ ανοιχτή περιοχή του (x,y) στο $\underline{M}$ με την τοπολογία γινομένου

$U\cap V=\emptyset \iff U\times V\cap\Delta=\emptyset$

Τοπολογία γινομένου Schemes

$\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1 \neq \mathbb{A}^2$ διαφορετικές τοπολογίες

Αντικατάσταση της ιδιότητας Hausdorff. $\Rightarrow$ <u>**Separated**</u>

$X \xrightarrow{f} Y$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\Delta_{X/Y}"] \arrow[ddl, bend right, "Id_X"'] \arrow[ddr, bend left, "Id_X"] & \\
 & X\times_Y X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Σύνολα

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & A\times A \\
a \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr] & (a,a) \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr] & \\
 & a & a
\end{tikzcd}$$

$\Delta_{X/Y} : X \longrightarrow X\times_Y X$

Ορισμός $f: X \to Y$ separated $\Delta_{X/Y}: X \to X \times_Y X$ είναι κλειστή immersion.

"X κλειστό υπόσχημα του $X \times_Y X$" μέσω $\Delta_{X/Y}$.

Παρατήρηση Βιβλιογραφία: scheme $\rightsquigarrow$ prescheme

scheme : separated scheme.

X scheme έρχεται πάντα εφοδιασμένο με συνάρτηση

$$X \xrightarrow{f} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}.$$

Κάθε δακτύλιος είναι $\mathbb{Z}$-module.

$$\mathbb{Z} \longrightarrow R$$
$$1 \longrightarrow 1_R$$

Αν ο $f: X \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ είναι separated τότε το σχήμα λέγεται separated.

Κάθε affine σχήμα είναι separated

$(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ R αντιμεταθετικός με με μονάδα

$$X \times X = \operatorname{Spec}(R \otimes_{\mathbb{Z}} R)$$

Δ διαγώνιος μορφισμός

$$\eta: R \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow R$$
$$a \otimes b \longmapsto ab$$

ο μορφισμός η είναι επί. $(1 \otimes b \to b)$

Έχουμε ότι ο διαγώνιος μορφισμός είναι κλειστή immersion

$$X \xhookrightarrow{1-1} Y$$

$$V(I) \longleftrightarrow \mathbb{A}^n$$

$\widetilde{k[x_1, \dots, x_n]}$ $k[x_1, \dots, x_n]$

$\boxed{\mathrm{I} \quad \underset{=}{\text{επί}} \quad \ldots}$

$$\Delta : X \longrightarrow X \times X$$

είναι κλειστή immersion

<u>Ένας αφινικός μορφισμός</u> $f: X = \operatorname{Spec} A \longrightarrow Y = \operatorname{Spec} B$ είναι πάντα διαχωρισμένος

$$X \times_Y X = \operatorname{Spec}(A \otimes_B A) \qquad A \xleftarrow{\varphi} B$$

το A γίνεται μέσω της φ B-module

$$\Delta_{X/Y} : X \longrightarrow X \times_Y X$$

$$A \otimes_B A \longrightarrow A$$

$a \otimes a' \longmapsto aa'$ $\underset{=}{\text{επί}}$ $\leadsto$ $\Delta_{X/Y}$ κλειστή immersion.

Separated δεν υπάρχει στα affine schemes. Άρα είναι μια ιδιότητα που έχει να κάνει με τα „κολλήματα".

<u>Πρόταση</u> $f: X \to Y$ είναι διαχωρισμένος αν και μόνο αν $\Delta_{X/Y}(X)$ είναι $\boxed{\text{κλειστό υποσύνολο}}$ του υποκείμενου τόπου $X \times_Y X$.

„$\Rightarrow$" closed immersion $\Delta_{X/Y}$ τότε $\Delta_{X/Y}(X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times_Y X$.

$$X \xrightarrow{\Delta_{X/Y}} X \times_Y X \xrightarrow[p_1]{} X \qquad \underline{p_1 \circ \Delta_{X/Y}} = Id_X$$

<u>Τοπολογικά</u> $\quad X \cong \Delta_{X/Y}(X)$

$$\Delta^* : \underbrace{\mathcal{O}_{X \times_Y X} \longrightarrow \Delta^*_{X/Y} \mathcal{O}_X}_{\text{τοπική ιδιότητα}}$$ είναι επί.

$x \in X$ διαλέγουμε ανοιχτό U του x $\qquad Z_1 \xrightarrow{f} Z_2$

$f(U)$ να περιέχεται σε ένα αφινικό

Y του X

$$f : \underset{\sim}{X} \longrightarrow \underset{\cup}{Y}$$

$$\underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{ανοιχτό}} \longrightarrow V$$

$$\underline{\tilde{U} \text{ αφινικό}} \xrightarrow{f} V$$

$\mathcal{O}_{Z_1}$ $\mathcal{O}_{Z_2}$

$f^*\mathcal{O}_{Z_2}$ είναι sheaf στο Z_1

$$f^*\mathcal{O}_{Z_2}(U) = \mathcal{O}_{Z_1}(f^{-1}(U))$$

$$\mathcal{O}_{Z_1} \xrightarrow{\text{επί}} f^*\mathcal{O}_{Z_2}$$

στην περιοχή του του X ο διαγώνιος μορφισμός

$\Delta_{X \times_Y X}$ είναι ο

$$\Delta_U : \underset{\text{af}}{U} \longrightarrow U \times_Y U$$

U, V affine. κλειστή immersion.

$U \times_Y U$ ανοιχτό του $X \times_X X$

$$\Delta^* : \mathcal{O}_{U \times_Y U} \longrightarrow \Delta^*_U \mathcal{O}_U$$

επί το ίδιο ισχύει και για.

$$\Delta^{\#}_{X/Y} : \mathcal{O}_{X \times_Y X} \longrightarrow \Delta^*_{X/X} \mathcal{O}_X .$$

Η εικόνα $\Delta_{X/Y}(X)$ του διαγώνιου μορφισμού είναι (με βάση την παραπάνω απόδειξη) τοπικά κλειστή, δηλαδή υπάρχει

$U \supset \Delta_{X/Y}(X)$ ώστε το $\Delta_{X/Y}(X)$ να είναι κλειστό στο U.