Αλγεβρική Γεωμετρία 18/3/2021.

Spec$\underline{R}$ τα πρώτα ιδεώδη του R

R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

$$V(I) = \{ P \in \mathrm{Spec}R \; : \; I \subset P \}$$ ← αλγεβρικό σύνολο.

Τα στοιχεία του $r \in R$ τα βλέπω ως συναρτήσεις στο Spec$R$ (γεωμετρικό αντικείμενο).

$$\underset{\mathrm{Spec}R}{\overset{\Psi}{P}} \xrightarrow[r\in R]{} r(P) = r \bmod P \in R/P$$

Τα $V(I)$ ως κλειστά σύνολα.

$$\overline{\langle 0 \rangle} = V(\langle 0 \rangle) = \mathrm{Spec}R$$ Το $\langle 0 \rangle$ generic point.

$$D(I) = V(I)^c = \{ P \in \mathrm{Spec}R \quad I \not\subset P \}$$

$$D(f) = \{ P \in \mathrm{Spec}R \quad f \notin P \}$$ ← βάση ανοιχτών.

Για $f \in R$ έχουμε $D(f) = \emptyset \iff f$ είναι μηδενοδύναμο $\iff \exists m \in \mathbb{N} \; f^m = 0 \iff f \in \sqrt{\langle 0 \rangle}$

$D(f) = \emptyset \quad f \in P$ για κάθε πρώτο ιδεώδες.

$$\sqrt{\langle 0 \rangle} = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}R} P$$

Έστω $h \in \sqrt{\langle 0 \rangle} \overset{\text{ορ.}}{\Rightarrow} h^m = 0 \in P \xRightarrow{P \text{ πρώτο}} h \in P \quad \forall\, P$ πρώτο

$$\sqrt{\langle 0 \rangle} \subset \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}R} P.$$

Αντιστρόφως

έστω $x \in \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}R} P$ και έστω $x^m \in \langle 0 \rangle \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

$$S_x = \{ a \triangleleft R \mid x^n \notin a \quad \forall n \in \mathbb{N} \}$$

Το S_x είναι μη κενό $\langle 0 \rangle \in S_x$

Το S είναι μη κενό, $\langle 0 \rangle \in S$

Αφου ο δακτύλιος R είναι Noether. το S έχει ένα μεγιστο στοιχείο q

Το q είναι πρώτο γιατι

$\underline{ab \in q}$ με $a \notin q$, $b \notin q$

$q \subsetneq \langle q, a \rangle \notin S$ αφου το q μέγιστο.

$q \subsetneq \langle q, b \rangle \notin S$

$c_1, c_2 \in R$

$\exists \; n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ $\quad x^{n_1} \in \langle q, a \rangle \quad x^{n_1} = a c_1 + q_1 \quad q_1 \in Q$

$\quad x^{n_2} \in \langle q, b \rangle \quad x^{n_2} = b c_2 + q_2.$

$$x^{n_1+n_2} = (a c_1 + q_1)(b c_2 + q_2) =$$

$$= \underbrace{ab}_{\in q} c_1 c_2 + a c_1 \bar{q}_2 + b c_2 \bar{q}_1 + \bar{q}_1 \bar{q}_2$$

$\cap \; q$

αρα $x^{n_1+n_2} \in q$ άτοπο $q \in S$

$\Rightarrow x \in \sqrt{0}.$

$\underline{\text{Παραδειγματα}}$ $\quad R = \mathbb{Z} \quad \operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \ldots \langle p \rangle\}$

απειρα το πληθος σημεια

πρωτο αφου το $\mathbb{Z}$ ακ. περιοχη

$\boxed{R/_{\langle 0 \rangle} \cong \underline{R}}$

k αλγεβρικα κλειστο σωμα.

$\operatorname{Spec} k[x] = \{\langle 0 \rangle \cup \{\langle x - a \rangle \mid a \in k\}\}$

Καθε ιδεωδες του $k[x]$ ειναι κυριο.

τα πρωτα ειναι τα αναγωγα $\Rightarrow$ γραμμικα.

$\operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x] = \langle 0 \rangle \cup$ Καθε f αναγωγο με συντελεστες

$\underbrace{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}[x]}$ ...

περιεχεται η αλγεβρικη θεωρια αριθμων

απο το $\mathbb{Q}$.

σωμα αριθμων.

αναγωγο πολυωνυμο $\rightsquigarrow$ $\mathbb{Q}[x]/f$

$|$

$\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Z}[x] \leftsquigarrow$ δακτυλιος διασταση 2

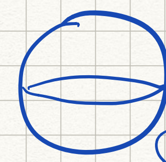
αλυσιδες πρωτων ιδεωδων.

Αριθμητική επιφανεια

$V(x^2+y^2+z^2-1) \subset \mathbb{A}^3_k$ k σώμα

$\to$ είναι επιφανεια.

$(z = \sqrt{1-x^2-y^2})$



Σ

Ποια είναι τα πρώτα ιδεωδη του $\mathbb{Z}[x]$?

$\underline{P} \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[x]$

- $\underline{P} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ αυτο είναι πρωτο ιδεωδες του $\mathbb{Z}$

$\underset{\in \mathbb{Z}}{a, b} \in P \cap \mathbb{Z}$ $ab \in P \cap \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$ab \in \underline{P}$

$\Rightarrow a \in \underline{P}$ ή $b \in \underline{P}$.

$\underline{P} \cap \mathbb{Z} = \langle p \rangle$

$$\Phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{F}_p[x] \longrightarrow \mathbb{F}_p[x]/\overline{P}$$

$$f(x) \longrightarrow f(x) \bmod p.$$

$$\underset{\underline{P}}{\cup} \longrightarrow \Phi(\underline{P}) = \overline{\underline{P}}$$

$$\underbrace{\mathbb{Z}[x]/\underline{P}}_{\text{ακ. περιοχη}} \cong \underbrace{\mathbb{F}_p[x]/\overline{P}}$$ ακ. περιοχη.

$\longrightarrow$ είναι αναγωγο

$\bar{P}$ είναι πρώτο $\quad \bar{P} = \langle g(x) \rangle$ του $\mathbb{F}_p[x]$.

$$f(x) \in \mathbb{Z}[x] \longrightarrow f(x) \bmod p = g(x)$$

Παρατηρούμε $\quad f(x) \equiv f_1(x) \bmod p$

$$\langle f(x), p \rangle = \langle f_1(x), p \rangle$$

$$P = \langle p, f(x) \rangle$$

$$V(\langle p \rangle) = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x]$$

|| οριακός

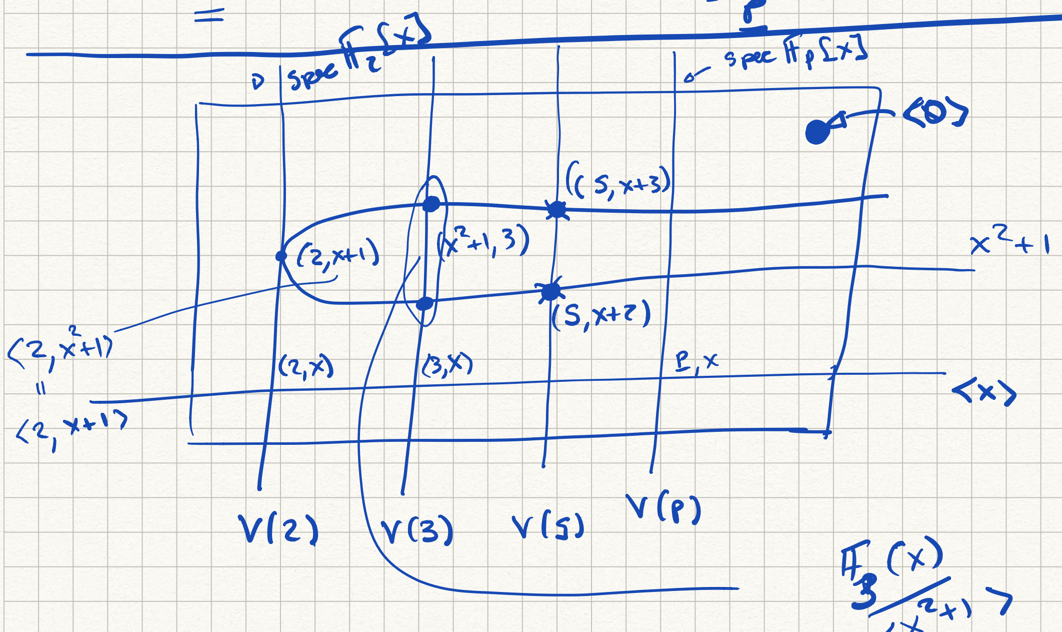
$P \subset Q \longleftrightarrow$ ιδεώδη $\dfrac{\mathbb{Z}[x]}{P}$

$R \quad I \triangleleft R$

(πρώτα) ιδεώδη του R/I

$\updownarrow$

(πρώτα) ιδεώδη του R τα οποία περιέχουν το I.



$P \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] \qquad P \cap \mathbb{Z} \neq \{0\} = \langle p \rangle.$

Αν $\quad P \cap \mathbb{Z} = \{0\}$

$$f \in \mathbb{Q}[x]$$

$$a_0 x^n + a_1 x^{n} + \dots + a_0 x$$

Αν $P \neq \{0\}$ $\qquad a_i \in \mathbb{Z}$, $(a_0, \dots, a_n) = 1$

τότε τα στοιχεία του αποτελούνται από πολυώνυμα με μη μηδενικούς συντελεστές.

Έστω d_0 ο μικρότερος βαθμός πολυωνύμου στο P.

$$P_d = \{ h(x) \in P : \deg h(x) = d \} \qquad d \in \mathbb{N}$$

Έστω $f(x) \in P_{d_0}$ ώστε ο συντελεστής του x^{d_0} να είναι ο μικρότερος δυνατός θετικός αριθμός.

$-1 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[x]$

Κάθε στοιχείο του P_{d_0} είναι ακ. πολ/σιο του $f(x)$.

Πράγματι αν $g(x) = b x^{d_0} + b_1 x^{d_0 - 1} + \dots \in P_{d_0}$

αν ~~..~~ ο συντελεστής b δεν είναι πολ/σιο του a

$c = (a, b)$ $\qquad c = ma + nb$ $\qquad m, n \in \mathbb{Z}$.

$1 \leq c < a$

$$\underbrace{m f(x) + n g(x)}_{(ma+nb)\, x^{d_0}} \in P_{d_0}$$

$ma + nb = c$ $\qquad c < a$

Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των συντελεστών:

$$(a, a_1, \dots, a_{d_0}) = 1$$

$$f(x) = a x^{d_0} + a_1 x^{d_0 - 1} + \dots + a_{d_0}$$

Διαφορετικά αν $e = (a, a_1, \dots, a_{d_0})$ $\qquad e \geq 2$

$$P \Rightarrow f(x) = e(\underbrace{a' x^{d_0} + a_1' x^{d_0 - 1} + \dots + a'_{d_0}}_{\notin P})$$

$\mathbb{Z}$ — $e \notin P$

$P \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$

$e = 1$

Το $f(x)$ είναι ανάγωγο γιατί αν γράφονταν ως γινόμενο δύο πολυωνύμων το ένα από αυτά θα ήταν πολυώνυμο του P με μικρότερο βαθμό.

Θα δείξουμε ότι $P = \langle f(x) \rangle$

Έστω $g(x) = c_0 x^d + c_1 x^{d-1} + \dots + c_d \in P$

$b_0 = (a, c_0)$ Αν $b_0 \neq a$ τότε υπάρχουν

m_0, n_0 $\quad m_0 a + n_0 c_0 = b_0$

$$h(x) = m_0 x^{d-d_0} f(x) + n_0 g(x) \in P_d$$

$$= b_0 x^d + \dots$$

$b_0 \mid a \qquad a = a'' b_0$

$$a'' h(x) - x^{d-d_0} f(x) \in P_{d'} \qquad d' < d$$

$\langle f(x) \rangle \cap P_d = P_d$ με επαγωγή. $d = d_0$ το έχουμε δείξει.

ισχύει μέχρι το $d-1$

$$a'' h(x) - x^{d-d_0} f(x) \in \langle f(x) \rangle$$

$$\Rightarrow a'' h(x) \in \langle f(x) \rangle \subset P$$

b_0 του $h(x)$ δεν είναι πολ/σιο. a.

$h(x) \notin \langle f(x) \rangle \qquad a'' \notin \langle f(x) \rangle$ σταθερά.

$\Rightarrow$ Ο συντελεστής του $* x^d + \dots$ για πολυώνυμο στο P πρέπει να είναι πολ/σιο του \.

$$g(x) = c_0 x^d + c_1 x^{d-1} + \dots$$

$$\underbrace{g(x) - \overset{c'\cdot a}{\overset{\shortparallel}{}}\, c' x^{d-d_0} f(x)}_{g(x)\ \in\ \langle f(x)\rangle} \in \underline{\underline{P_{d''}}} \qquad d'' < d.$$

Συνεπώς

$$\langle f(x)\rangle \cap \underline{\underline{P_d}} = P_d \quad \text{για κάθε } d \geq d_0$$

$$\langle f(x)\rangle = \underline{P} \quad \text{Μας χαρακτηρ.}$$

τα ιδεώδη P ώστε $P \cap \mathbb{Z} = \{0\}$

f ανάγωγα $\in \mathbb{Z}[x]$ με συντελεστές πρώτους μεταξύ τους.

$$\Phi : R \longrightarrow S \qquad \varphi^{\#} : \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R.$$

$$\operatorname{Spec} R \ni \varphi^{-1}(\underline{P}) \longrightarrow \underline{P} \in \operatorname{Spec} S \qquad V(I)$$

Η $\varphi^{\#}$ είναι συνεχής ως προς την τοπολογία Zariski.

Αρκεί να δείξουμε ότι η $\Phi^{\#}$ αντιστρέφει κλειστά σε κλειστά.

$$\underline{(\Phi^{\#})^{-1}}\, V(I) = \{ Q \in \operatorname{Spec} S : \varphi^{\#}(Q) \in V(I) \}$$

$$\underline{\Phi^{-1}(Q) \in V(I)}$$

$$\shortparallel$$

$$V(\Phi(I))$$

το οποίο είναι κλειστό

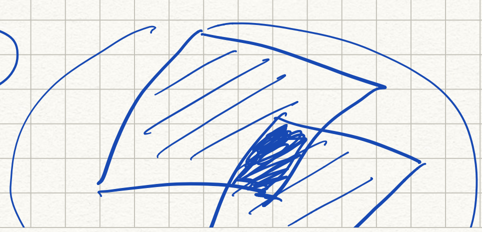
ορισμός του $V(I)$ $\quad I \subseteq \Phi^{-1}(Q)$

$$\Phi(I) \subset Q$$

$$\Rightarrow Q \in V(\Phi(I))$$

Διαφορίσιμες πολ/τες $\quad \mathbb{R}^n$

Βασικά σύνολα: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$



διαφορισιμες συναρτησεις

Το ίδιο θα κανω και στα <u>σχήματα</u>. <u>**Schemes**</u>

Βασικα σύνολα που κολλάω.

$$(\underbrace{\operatorname{Spec} R}, \underset{\sim}{R}) \leftarrow \quad \underline{\text{αφινικο σχήμα}}$$

$$D(f)=\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : f \notin \mathfrak{p}\}$$

$$\| \quad X_f$$

$X=\operatorname{Spec} \underline{R}$

$D(f) : \underline{X_f}.$

<u>Πρόταση</u>

$$\operatorname{Spec} R = \bigcup_{\alpha\in A} (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha}$$

αν και μονο αν $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha\in A} = \underline{R}$

Εστω $\underline{\operatorname{Spec} R} = \bigcup_{\alpha\in A} (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha}$ $\quad (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha} = D(f_\alpha)$

αρα για ενα τυχαιο $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ εχουμε

$$\mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha} \underset{\substack{\text{op.}\\ D(f_\alpha)}}{\Longrightarrow} \underline{f_\alpha \notin \mathfrak{p}}$$

Κανενα πρωτο ιδεωδες δεν μπορει να περιεχει το ιδεωδες που παραγουν ~~τα~~ τα f_α

$$f_\alpha \in \langle f_\alpha \rangle_{\alpha\in A} \subset \underline{\mathfrak{p}}$$

Καθε γνησιο ιδεωδες ~~περιεχε~~ του R περιεχεται σε καποιο μεγιστο αρα πρώτο.

Το [illegible] ιδεωδες $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ δεν ειναι γνησιο

$$\| \quad \underline{R}$$

<u>Αντιστροφως</u> $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha\in A} = \underline{R}$

και $\mathfrak{p}$ πρωτο ιδεωδ τοτε υπαρχει ενα f_α

με $\underline{f_\alpha \notin \mathfrak{p}}$ (αν ολα τα $f_\alpha \in \mathfrak{p}$ το $\mathfrak{p} = R$)

$\langle f_\alpha \rangle_{\alpha\in A} \subseteq \mathfrak{p} \subset R$

$\Downarrow$

$\mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha}$.

$$\operatorname{Spec} R \subset \bigcup_{\alpha\in A} (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha}.$$

Καθε ανοιχτο υποσυνολο $X = \operatorname{Spec} R$ ειναι ένωση ανοιχτων X_f (βάση ανοιχτων της Zarisk.).

Αν $\underline{\langle f_\alpha \rangle_{\alpha\in A}} = \overset{1}{R}$ μπορουμε να διαλεξουμε

$\overset{R}{}$

πεπ. απο αυτα $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} g_{\alpha_j} f_{\alpha_j}}$ $= \underline{1}$ $\langle f_{\alpha_j} \rangle_{j=1}^{n}$

① τοπολ. χωρος $X = \operatorname{Spec} R$ ειναι <u>ημισυμπαγης</u>.

Δηλαδη για κάθε ανοικτο κάλυμμα υπάρχει πεπ. υποκαλυμμα

quasicompact: $=$ compact

$+$ Hausdorff.

$X = \operatorname{Spec} \underline{R}$ $\qquad f, g \in \underline{R}$

1) $X_f \cap X_g = X_{fg}$

2) $X_f \supset X_g \iff g \in \sqrt{f}$

1) Αν $\mathfrak{p} \in X_f \cap X_g \Rightarrow \begin{array}{c} f \notin \mathfrak{p} \\ g \notin \mathfrak{p} \end{array} \xrightarrow{\mathfrak{p}\ \text{πρωτο}} f\cdot g \notin \mathfrak{p}$

$\Downarrow$

$\mathfrak{p} \in X_{fg}$

Αντιστροφως αν $\underline{P} \in X_{fg} \Rightarrow f \cdot g \notin \underline{P} \Rightarrow f \notin P$, $g \notin \underline{P} \Rightarrow$

ιδεωδες

$\underline{P} \in X_f \cap X_g$

$X_f \supset X_g \Leftrightarrow g \in \sqrt{\langle f \rangle}$.

$$\underbrace{\sqrt{\langle f \rangle} = \bigcap_{\substack{\underline{P} \in \operatorname{Spec} R \\ f \in \underline{P}}} \underline{P}}$$

παρατ. $f = 0$

$$\sqrt{\langle 0 \rangle} = \bigcap_{\substack{P \in \operatorname{Spec} R \\ \cancel{0 \in \underline{P}}}} \underline{P}$$

Αυτή την ειδικη περιπ. την εχουμε

Αν $h \in \sqrt{\langle f \rangle}$ $\quad \exists m \in \mathbb{N} \quad h^m \in \langle f \rangle$

$\underline{P}$ πρωτο. $\quad f \in \underline{P}$

$h^m \in \underline{P} \Rightarrow$
$\Rightarrow h \in \underline{P}$

$$\sqrt{\langle f \rangle} \subset \bigcap_{f \in \underline{P}} \underline{P}$$

Αντιστροφως αν

$$h \in \bigcap_{f \in \underline{P}} \underline{P}$$

υποθετουμε $h^m \notin \langle f \rangle$ για καθε $m \in \mathbb{N}$

τοτε

$$S = \{ a \triangleleft R : f \in a, \ h^m \notin a \ \ \forall m \in \mathbb{N}. \}$$

$S \neq \emptyset \qquad \langle f \rangle \in S$

Q μεγιστο στοιχειο του S.

το Q ειναι πρωτο

$ab \in Q$ με $a \notin Q$, $b \notin Q$

$Q \subsetneq (Q, a) \notin S$
$\subsetneq (Q, b)$

συνεπως υπαρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$h^{n_1} \in (Q, a)$ $\qquad h^{n_1} = ac_1 + q_1$

$h^{n_2} \in (Q, b)$ $\qquad h^{n_2} = bc_2 + q_2$

$$h^{n_1+n_2} = abc_1c_2 + ac_1q_2 + bc_2q_1 + q_1q_2 \in Q$$

ατοπο.

Q πρωτο $\quad f \in Q \quad h \notin Q$

$\exists \quad h^{m} \in \langle f \rangle.$

$g \notin \sqrt{\langle f \rangle}$ αν και μονο αν υπαρχει πρωτο ιδεωδες με $f \in \underline{P}$, $g \notin \underline{P}$

$\underline{P} \notin X_f$ και $P \in X_g$

δηλαδη X_f δεν περιεχει το X_g.