Αλγεβρική Γεωμετρία 16/3/2021

Ορισμό ιδιομορφίας $I(V) = \langle f_1,\dots,f_k\rangle$

Ο ορισμός με το rank της ιακωβιανής εξαρτάται από την εμφύτευση του $V \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k$ ισοδύναμα από την παράσταση του $k[V]$ σαν $k[x_1,\dots,x_n]/I(V)$.

Θα δώσουμε έναν ορισμό που να βασίζεται σε δ. δακτυλίων. Αυτός ο ορισμός θα είναι ανεξάρτητος της αναπαράστασης

<u>Ορισμός</u> Ένας δακτύλιος R θα λέγεται τοπικός αν έχει ένα μόνο μέγιστο ιδεώδες m

$$R/m = k \quad \text{σώμα} \quad (\text{το σώμα των υπολοίπων})$$

Τα $r \in (R \setminus m)$ είναι όλα μονάδες.

R είναι πάντα αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

m ένα μέγιστο ιδεώδες του R (p πρώτο ιδεώδες)

R localization εντοπισμός.

$$S = (R \setminus m) \quad \text{πολ/κά κλειστό}$$

$R \cdot S^{-1}$ εντοπισμός (local.) Ότι δεν είναι στο m γίνεται μονάδα. Συνεπώς τα ιδεώδη που δεν περιέχονται στο m εξαφανίζονται.

<u>Παράδειγμα</u> $\mathbb{Z}$ $\langle 3 \rangle$ $\mathbb{Z}_{(3)} = \left\{ \frac{a}{b} \quad a \in \mathbb{Z}, \ 3 \nmid b \right\}$

αυτός ο δακτύλιος είναι τοπικός

Μέγιστο ιδεώδες έχει το $3\mathbb{Z}_{(3)}$

$$\mathbb{Z}_{(3)} / 3\mathbb{Z}_{(3)} \cong \mathbb{F}_3$$

(2) $k[x]$ k-σώμα $\langle x-1 \rangle$ ← είναι μέγιστο $k[x]/\langle x-1\rangle \cong k$

$$k[x]_{(x-1)} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f \in k[x], \ g(x): \ (x-1) \nmid g(x) \iff g(1) \neq 0 \right\}$$

↑ τοπικός δα

δακτύλιος

$$k[x] \subset k[x]_{(x-1)} \subset k[[x-1]]$$ ← τοπικές διαφορίσιμες γύρω από το 1.

R λέγεται τοπικός κανονικός δακτύλιος regular local ring

$\Updownarrow$ op.

$$\boxed{\underbrace{\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2}} = \dim \underline{R}$$ ← Krull διάσταση (αυτή με τις αλυσίδες πρώτων ιδεωδών)

Διάσταση ενός διανυσματικού χώρου.

$k = R/\mathfrak{m}$ σώμα υπολοίπων.

το $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ γίνεται $R/\mathfrak{m} = k$ διανυσματικός χώρος

$$R/\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

$$(\alpha \bmod \mathfrak{m},\ \underset{\beta\in\mathfrak{m}}{\beta \bmod \mathfrak{m}^2}) \longrightarrow \alpha\beta \bmod \mathfrak{m}^2$$

$\|$

$\alpha' \bmod \mathfrak{m},\ \beta' \bmod \mathfrak{m}^2$

$\alpha\cdot\beta \in \mathfrak{m}$ OK αφού $\alpha\in R$ $\beta\in\mathfrak{m}$.

$\alpha\cdot\beta = \alpha'\beta' \bmod \mathfrak{m}^2$ ανεξάρτητο από τους αντιπροσώπους

$\alpha' = \alpha + m_1 \quad m_1 \in \mathfrak{m}$

$\beta' = \beta + m_2 \in \mathfrak{m}^2$, $\beta \in \mathfrak{m}$

$$\alpha'\beta' = (\alpha+m_1)(\beta+m_2)$$
$$= \alpha\beta + \underset{\in\,\mathfrak{m}^2}{m_1\beta} + \underset{\in\,\mathfrak{m}^2}{\alpha m_2} + \underset{\in\,\mathfrak{m}^2}{m_1 m_2}$$

<u>Θεώρημα</u> $Y \subset \mathbb{A}^n_k \quad P \in Y$

<u>Ο Y είναι μη ιδιόμορφος στο P</u> $\Leftrightarrow$ $\boxed{k[Y]_P \text{ είναι } \underline{\text{R.l.r}}}$

$$k[Y] = \frac{k[x_1,\dots,x_n]}{I(Y)}$$

$[P]$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $k[x_1,\dots,x_n]$

P μέγιστο ιδεώδες το βλέπουμε ως σημείο

$\underline{[P] \supset I(Y)}$ $\quad$ $\underline{P \in Y}$

Τα ιδεώδη του R/I $\xleftrightarrow[\text{επί}]{1-1}$ J του R

$[P]$ μεγιστο ιδεωδες του $k[x]$

$$k[x]_{[P]} = \underbrace{k[x]\left(k[x]\setminus[P]\right)^{-1}}_{\left(\frac{\alpha}{\beta},\ \beta\notin[P]\right)}$$

I αντιστοι. $J \supset I$

$J/I \longleftarrow J$

πηλικο υποδακτυλιων ομαδων, R/I ιδεωδη

Θεωρουμε το σημειο $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \mathbb{A}^n_k$ $\qquad m_p = \langle x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n\rangle$

$f\in k[x_1,\dots,x_n]$

$$\partial(f): k[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow k^n$$
$$f \longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right)$$

Για ενα πολυωνυμο f $\quad f(P) = f \bmod m_p.$

$R \ni f \quad f(P) = f \bmod P.$ — θα επανελθουμε

Γραμμικη ($\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ειναι γραμμικα).

Επι $\quad \underline{\sum \lambda_i(x_i-\alpha_i)} \longrightarrow \underline{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}$ $\quad \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in k^n$

$$\left.\frac{\partial(x_i-\alpha_i)}{\partial x_j}\right|_P = \delta_{ij}$$

$\ker\partial = m_p^2$ δηλαδη ειναι πολυωνυμα των $\underline{(x-\alpha_i)(x-\alpha_j)}$ $\quad 0\le i,j\le n$

$$\partial' : m_p/m_p^2 \xrightarrow{\cong} k^n$$

$I(X) = \langle f_1,\dots f_t\rangle$ συνολο γεννητορων

Ταξη του Ιακωβιανου πινακα ειναι η

$\underline{\partial'(I(X))}$ ως υποχωρος του k^n

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_p & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \left.\frac{\partial f_t}{\partial x_1}\right|_p & & \left.\frac{\partial f_t}{\partial x_n}\right|_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial'(f_1) \\ \hline \partial'(f_n) \end{pmatrix}$$

καθε $\in k^n$

$$m_p/m_p^2 \overset{\partial}{\cong} k^n \qquad \boxed{\frac{I(X)+m_p}{m_p^2}} \xrightarrow{\partial} \boxed{\text{ιδιο } \partial(I(X))}$$

$$f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\Big|_p (x-a_i) + \underbrace{\text{Hess}\,(x-a_i)(x-a_j)}_{m_p^2}$$

Taylor
μέχρι τον τετραγων. όρο.

$$\operatorname{rank} J_{ac.} = \dim_k \frac{I(X)+m_p}{m_p^2}$$

$m_p \supset I(X)$

Το μέγιστο ιδεώδες του τοπικού δακτυλίου $m = \frac{m_p}{I(X)} k[X]_{m_p}$

$$m_p \longrightarrow \frac{m_p}{I(X)} k[X]_m = m \longrightarrow m/m^2$$

1) επί
2) πυρήνας $I(X) + m_p^2$

$$m/m^2 \cong \frac{m_p}{(I(X)+m_p^2)}$$

$$0 \longrightarrow \frac{I(X)+m_p}{m_p^2} \xrightarrow[1-1]{} \frac{m_p}{m_p^2} \xrightarrow{\text{επί}} \frac{\frac{m_p}{m_p^2}}{\frac{I(X)+m_p}{m_p^2}} \cong \frac{m_p}{I(X)+m_p} \to 0$$

$$\frac{m_p}{I(X)+m_p} = \boxed{m/m^2}$$

$$\dim \frac{m_p}{m_p^2} = \dim \frac{I(X)+m_p}{m_p^2} + \underbrace{\dim \frac{m_p}{I(X)+m_p}}$$

$$\dim m/m^2 + \dim J = \dim \frac{m_p}{m_p^2} = n$$

- $k[X]_p$ είναι κανονικός τοπικός δακτύλιος διάστασης r $\Rightarrow$
- $r = \dim X$

$$n - d = \underline{n - r}$$

$$\Rightarrow \underline{d = r}$$

Εφαπτόμενος κώνος: Γενικεύει τον εφαπτόμενο χώρο.

$F \in k[x_1, \dots, x_n]$

$$F = F_0 + F_1 + \dots + F_m \qquad \deg F_i = i$$

F_i ομογενη βαθμου i

$$\underline{F = x^3 + x^2 - y^2}$$

$$F = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{F_0} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{F_1} + \underset{\substack{\parallel \\ x^2-y^2}}{F_2} + \underset{\substack{\parallel \\ x^3}}{F_3}$$

Τον πρωτο μη μηδενικο όρο τον ονομαζω αρχικο όρο

$$F_* = (x^3 + x^2 - y^2)_* = x^2 - y^2$$

<u>Καμπύλες</u> $F(x,y)$ ομογενες βαθμου n

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_n y^n$$

$$= y^n \underbrace{\left(a_0 \left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \frac{x}{y} + a_0 \right)}_{\text{πολυωνυμο μιας μεταβλ.} \qquad k \text{ αλγ. κλειστο}}$$

$$y^n \left(a_0 \left(\frac{x}{y} - p_1\right)\left(\frac{x}{y} - p_2\right) \cdots \left(\frac{x}{y} - p_n\right) \right)$$

$$= a_0 (x - p_1 y)(x - p_2 y) \cdots (x - p_n y)$$

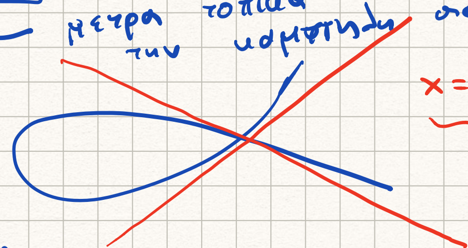
Αν $F(x,y)$ δυο μεταβλητων F_* ομογενες βαθμου ℓ

$$\underbrace{a_0 x^{r_0} \prod_i (y - p_i x)^{r_i}}_{\text{μετρα την τοπικα ιδιομορφια στο } (0,0)} \quad \text{βαθμου } \ell.$$

$$F(x,y) = x^3 + \overbrace{x^2 - y^2}$$

$$F_* = x^2 - y^2$$

σε περιοχη του $(0,0)$



$x = \pm y$

το x^3 ειναι αμελητεο σε σχεση με τα x, y.

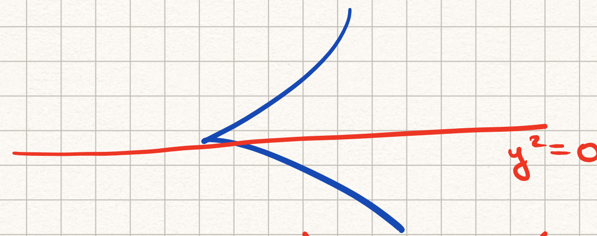
$x, y \sim 10^{-10}$

$x^2, y^2 \sim 10^{-100}$

$x^3 \sim \underline{10^{-1000}}$

$F(x,y) = x^3 - y^2$

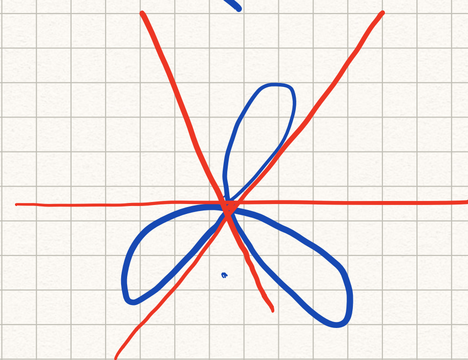
$F_* = y^2$

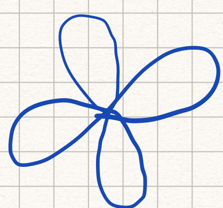


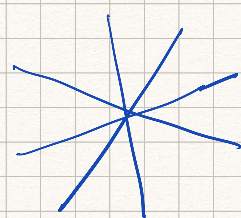
$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3$

$F_* = 3x^2y - y^3$ $y=0$

$y = \pm\sqrt{3}$







$\Pi(x-$

$\underline{\cancel{1} + (x-\lambda_1 y)(x-\lambda_2 y)(x-\lambda_3 y)(x-\lambda_4 y)}$

Ορισμος

V αλγεβρικο συνολο $I(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$

$I(V)_* = \langle f_1^*, \dots, f_r^* \rangle$

$V(I(V)_*)$ εφαπτομενο κώνο.

f_* είναι γραμμικο $V(f_*)$ είναι ο εφαπτομενος χώρος.

$\underline{(x-y) + x^2+y^2}$ εφαπτομενος χωρος θα ήταν ευθεία

Φάσμα ενός δακτυλίου $\quad R$ αντιμεταθετικός δακτύλιος με 1.

όχι απαραίτητα μια k-άλγεβρα.

Αναγωγή. $R \xrightarrow{\varphi} S$ ομομορφισμός δακτυλίων

$$\varphi^{-1}(m) = \varphi(m) \longleftarrow \mathrm{Specm}(S) = \left\{ \begin{array}{l} \text{μέγιστο} \\ \text{φάσμα} \end{array} \right.$$

m μεγίστων ιδεωδών

Πρόβλημα Αν R, S k-άλγεβρες οι αντίστροφες εικόνες μέγιστων ιδεωδών είναι μέγιστα ιδεώδη.

Αν R, S τυχαία δακτύλιοι αυτό δεν συμβαίνει.

Ιδέα. V γεωμετρικό αλγεβρικό σύνολο $\longrightarrow k[V]$ γνωρίζει τα πάντα για το V

$$\mathrm{Specm}(V) \longleftarrow k[V]$$

μέγιστο φάσμα "γεωμετρικό αντικείμενο"

$$\mathrm{Spec}\,R \overset{?}{\longleftarrow} R \;\Big|\; \mathbb{Z} \text{ ή } \mathbb{Z}[x]$$

γενικότερος αντιμεταθετικός δακτύλιος

$\mathrm{Spec}\,R = \{$σύνολο των πρώτων ιδεωδών$\}$

$R \xrightarrow{\varphi} S$ ομομορφισμός δακτυλίων

$$\mathrm{Spec}\,R \ni \varphi^{-1}(P) \longleftarrow P \in \mathrm{Spec}\,R$$

$\mathrm{Spec}\,R$ τοπολογία.

$(\mathrm{Spec}\,R, R)$, R συναρτήσεις στο $\mathrm{Spec}\,R$

$$\mathrm{Spec}\,R \ni P \xrightarrow[f \in R]{} f(P) = f \bmod P$$

$R = k[x]$ $\qquad f \in k[x]$

$\operatorname{Spec} R = \langle x-a \rangle$
$a \in k$

$f(\langle x-a \rangle) = f \bmod \langle x-a \rangle = f(a)$

$R = \mathbb{Z}$ $\qquad \mathbb{Z} \ni f$

$\operatorname{Spec} R (\langle 0 \rangle, p\mathbb{Z})$ $\qquad f(p) = p \bmod p\mathbb{Z}.$

Σημαντικές διαφορές $k[x]$, $\mathbb{Z}$

η συνάρτηση $f \in k[x]$ στο $k[x]$ $\quad f(p) \in k$ ίδιο σώμα για κάθε p

$f \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ $\quad f(p) \in \mathbb{Z}/p \cong \mathbb{F}_p$

Διαφορετικό σώμα.

$5(3\mathbb{Z}) = 5 \bmod 3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$

$5(7\mathbb{Z}) = 5 \bmod 7 \longrightarrow \mathbb{F}_7$

$I \triangleleft R$

$V(I) \subset \operatorname{Spec} R = \{$σύνολο των πρώτων ιδεωδών$\}$

$\{ p \in \operatorname{Spec} R : I \subset p \}$

Σημεία δεν έχουν απαραίτητα διαφορά 0.

$\operatorname{Spec} R$ τοπολογικό χώρο.

Δεν είναι περίεργο.

$R = k[x_1, \dots, x_n]$

$I \triangleleft$

$V(I) = \{ p : f(p) = 0 \ \ \forall f \in I \}$

$f \bmod p = 0 \ \ \forall f \in I$

$f \in p \ \ \forall f \in I$

$I \subset p$

Πρόταση.

$$\boxed{\begin{aligned} &V(\langle 0 \rangle) = \operatorname{Spec} R \\ &V(R) = \emptyset \\ &V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) \\ &\bigcap V(I_\lambda) = V\Big(\sum_{\lambda \in T} I_\lambda\Big) \end{aligned}}$$

$\lambda \in \Lambda$

Αποδ. Καθε (πρωτο) ιδεωδες $\underline{P}$ περιεχει το $0 \in \underline{R}$

$$V(0) = \{ \underline{P} \in \operatorname{Spec} \underline{R} : \underline{0 \subset P} \} = \operatorname{Spec} R$$

δεν βαζει συνθηκη.

$$V(R) = \{ \underline{P} \in \operatorname{Spec} \underline{R} : \underline{R} \subset \underline{P} \} = \emptyset$$

το $\underline{R}$ δεν το θεωρουμε πρωτο ιδεωδες $(R/R = \{0\})$

Θα δειξουμε

$$V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$$

Εστω $\underline{P} \in V(I) \Leftrightarrow I \subset \underline{P}$

~~αρα~~ $\underline{P} \supset I \supset I \cap J \Rightarrow \underline{P} \in V(I \cap J)$

$$\left.\begin{matrix} V(I) \subset V(I \cap J) \\ V(J) \subset \end{matrix}\right. \Rightarrow V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J)$$

Αντιστρ. αν $\underline{P} \in V(I \cap J)$ εξ ορισμου $I \cap J \subset \underline{P}$

Αν $I \not\subset \underline{P}$ τοτε $\exists f \in I$ με $f \notin \underline{P}$

ενω $g \in J$ τυχαιο. Τοτε

$$g \cdot f \in I \cap J \subset \underline{P} \Rightarrow g \cdot f \in \underline{P} \xRightarrow{f \notin \underline{P}} g \in \underline{P}$$

αρα $\underline{P} \supset J \Rightarrow \underline{P} \in V(J)$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V\Big(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\Big)$$

Εστω $\underline{P} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) \Rightarrow \underline{P} \in V(I_\lambda) \ \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow \underline{P} \supset I_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda$

$\underline{P} \supset \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ ← ειναι εξ ορισμου το μικροτερο ιδεωδες που περιεχει $\cup I_\lambda$

Αν $\underline{P} \in V(\sum_{j\in\Lambda} I_j)$ τότε $I_j \subset \sum_{j\in\Lambda} I_j \subset \underline{P} \Rightarrow$

$$I_j \subset \underline{P} \quad \forall j \in \Lambda$$

$$\Rightarrow \bigcap_{j\in\Lambda} I_j \subset \underline{P}$$

Ορίζουμε την τοπολογία Zariski στο $\mathrm{Spec}R$ που έχει τα $V(I)$ ως κλειστά σύνολα.

$$D(I) = \{\underline{P} \in \mathrm{Spec}\underline{R} : I \not\subset \underline{P}\} = V(I)^c$$

ανοιχτά και ορίζουν τοπολογία.

$$D(f) = \{\underline{P} \in \mathrm{Spec}\underline{R} \mid f \notin \underline{P}\}$$
$$= \{\underline{P} \in \mathrm{Spec}R \mid f(\underline{P}) \neq 0\}$$

$f(\underline{P}) = f \bmod \underline{P}$

$f(\underline{P}) = 0 \Leftrightarrow f \in \underline{P}$.

βάση ανοιχτών

$$\boxed{D(I) = \bigcup_{f\in I} D(f)}$$

$I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$

βάση ανοιχτών τα $D(f)$: με ενώσεις δίνουν οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο

$$D(I) = \bigcup_{j=1}^{m} D(f_j)$$

$f \in I$, αν $f \notin \underline{P}$ $\quad I \not\subset \underline{P} \quad D(f) \subset D(I)$

$$\bigcup_{f\in I} D(f) \subset D(I).$$

Αν $\underline{P} \in D(I)$ τότε $I \not\subset \underline{P} \Rightarrow \exists f \in I \; f \notin \underline{P} \Rightarrow f \in D(f)$

$$D(I) \subset \bigcap_{f\in I} D(f)$$

$$D(I) = \bigcup_{j=1}^{m} D(f_j) \qquad I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

quasicompact „συμπάγεια"

Ορισμός συμπαγείας: Κάθε ανοιχτή κάλυψη έχει πεπ. υποκάλυψη $\circledast$

Γεν. Γάλλοι : compact $\circledast$ + Hausdorff.

Αμερ. : compact = $\circledast$.

$\circledast$ quasi compact

R Noether κάθε ανοιχτό καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος $D(f)$.

Πρόταση: $f \in R$ έχουμε $D(f) = \emptyset \iff f \in \sqrt{0}$

$\iff f^n = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\sqrt{\langle 0 \rangle} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{p}}$$

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{ \langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \dots \langle p \rangle, \dots \}$$

$$V(\langle 0 \rangle) = \overline{\langle 0 \rangle} = \operatorname{Spec} R$$

Ορισμός αν $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} R$ $\overline{\mathfrak{a}} = \operatorname{Spec} R$ τότε το $\mathfrak{a}$ λέγεται „generic point"