Αλγεβρικη Γεωμετρια 11/3/2021

$$\mathbb{P}^n_k = \underline{\mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{(0,\dots,0)\}} \Big/ \sim$$

$(a_1,\dots,a_n) \sim (b_1,\dots,b_n)$

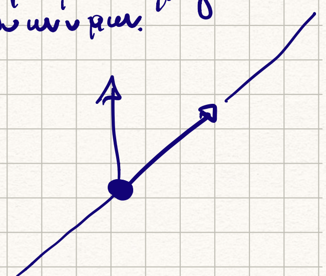
$\iff \underset{k}{\exists} \lambda \neq 0 \quad (a_1,\dots,a_n) = \lambda(b_1,\dots,b_n)$

$k[x_0,\dots,x_n]$

$I \trianglelefteq$ ομογενες ιδεωδες (το ιδεωδες παραγεται απο ομογενή πολυωνυμα)

$$V(I) = \{ P = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n_k : \underbrace{f(P) = 0}_{} \quad \forall f \in I \}$$

θα πρεπει καθε $f \in I$ να ειναι αθροισμα ομογενων πολυωνυμων.



$\langle x_0,\dots,x_n\rangle$ μεγιστο ιδεωδες του $k[x_0,\dots,x_n]$

$\mathbb{A}^{n+1} \ni (0,\dots,0)$

$$\underline{V(\langle x_0,\dots,x_n\rangle) = \emptyset}$$

$[a_0 : \dots : a_n] \longrightarrow$ ομογενες ιδεωδες που παραγεται απο τα $\langle a_j x_i - a_i x_j\rangle$

$\exists\, i$ ωστε $a_i \neq 0$

$$\underbrace{\left[\frac{a_0}{a_i}, \frac{a_1}{a_i}, \dots \frac{a_{i-1}}{a_i}, \underline{\underline{\frac{a_i}{a_i}}}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots \frac{a_n}{a_i}\right]}_{} \in U_i \cong \mathbb{A}^n_k$$

$$\left(\frac{a_0}{a_i}, \frac{a_1}{a_i}, \dots \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right) \text{ σημειο}$$

$$\langle \underline{x_1} - \underline{\frac{a_0}{a_i}}, x_2 - \frac{a_1}{a_i}, \dots, x_n - \frac{a_n}{a_i} \rangle$$

ομογενοποιηση ως προς x_i

$$\langle \underbrace{x_1 - \frac{a_0}{a_i} x_i}_{}, x_2 - \frac{a_1}{a_i} x_i, \dots \rangle$$

$a_i x_1 - a_0 x_i \rightsquigarrow \det \begin{bmatrix} a_0 & x_0 \\ a_i & x_i \end{bmatrix} = 0$

$\det \begin{bmatrix} a_0 & \lambda x_1 \\ a_i & \lambda x_i \end{bmatrix} = 0$

Nullstellensatz ομογενές αρκεί $V(J) = \emptyset$

Αναγωγισιμότητα = δεν γράφεται ως μη τετριμμένη ένωση κλειστών είναι ανάγωγα

Προβολικό σύνολο είναι ανάγωγο $\Leftrightarrow$ $I(V)$ πρώτο.

$k[x_0, \dots, x_n] / I(V)$ ομογενή δακτύλιο συντεταγμένων του

αφινικό αλγεβρικό σύνολο του $\mathbb{A}^{n+1}$

ο αφινικός κώνος του προβολικού συνόλου.

τοπ. Zariski : κλειστά αλγεβρικά προβολικά σύνολα.

$\mathbb{P}^n_k$ = κατάλληλο κομμάτι αφινικών χώρων $\mathbb{A}^n_k$ U_i $x_i \neq 0$

Προβολική πολ/τα προκύπτει για κατάλληλο κομμάτι $n+1$ αφινικές πολ/τες

$I = I(V)$ ομογενές ιδεώδες $\qquad f_1, \dots, f_e$ ομογενή πολυώνυμα γεννήτορες

$m_i = \deg f_i$

$$f_j^{(i)} = \frac{1}{x^{m_i}} f_j(x_0, \dots, x_n)$$

ομογενές βαθμού 6.

$$f = x_0^2 x_1^3 x_2 + x_2^6 + x_0 x_1^5$$

$$f^{(0)} = \frac{x_0^2 x_1^3 x_2 + x_2^6 + x_0 x_1^5}{x_0^6} = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^3 \left(\frac{x_2}{x_0}\right) + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^6 + \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^5$$

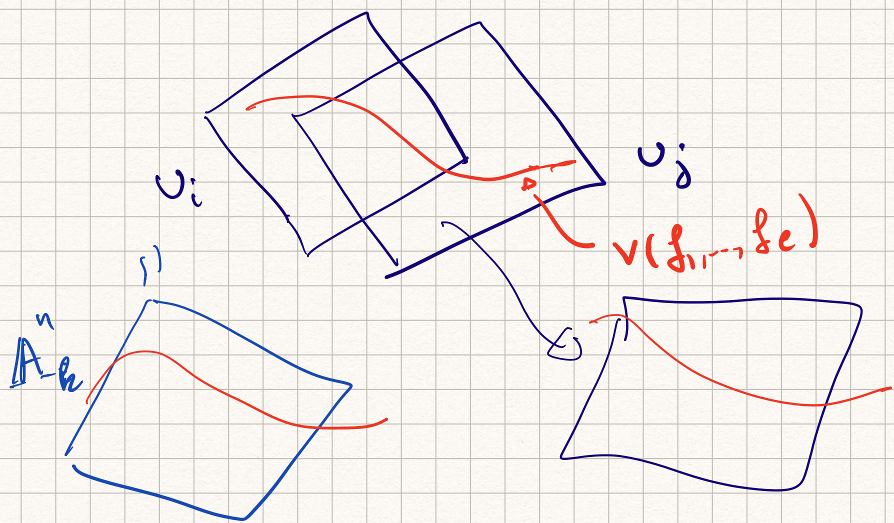
$x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$

$$f^{(1)} = \frac{x_0^2 x_1^3 x_2 + x_2^6 + x_0 x_1^5}{x_1^6} = \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^2 \left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_0}{x_1}\right)$$

$$f^{(2)} = \frac{x_0^2 x_1^3 x_2 + x_2^6 + x_0 x_1^5}{x_2^6} =$$

$$\langle f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_e^{(i)} \rangle \triangleleft k[x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}]$$

$$V(f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_e^{(i)}) \lhd \mathbb{A}_k^n = U_i$$



$V(x^2 + y^2 = z^2)$ Αλγεβρικό προβολικό σύνολο.

$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$ $\qquad$ $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{z}{y}\right)^2$

υπερβολή

Κλειστότητα (στην Zariski) και συνεκτικότητα

Ορισμός $\bar{V}(F) \subset \mathbb{P}^2_k$ (προβολικό επίπεδο) και ορίζεται από το ομογενές πολυώνυμο $\boxed{F(x_0, x_1, x_n) \text{ βαθμού } m}$ λέγεται επίπεδη προβολική καμπύλη βαθμού m

$C_1 = V(F)$ βαθμού n

$C_2 = V(G)$ $\qquad m$

$$C_1 \cdot C_2 = \sum_{i=1}^{\nu} I_{p_i}(C_1, C_2)$$

τοπική πολλαπλότητα / πολλαπλότητα τομής

Θεώρημα Bezout k αλγεβρικά κλειστό $\qquad C_1 \cdot C_2 = n \cdot m$

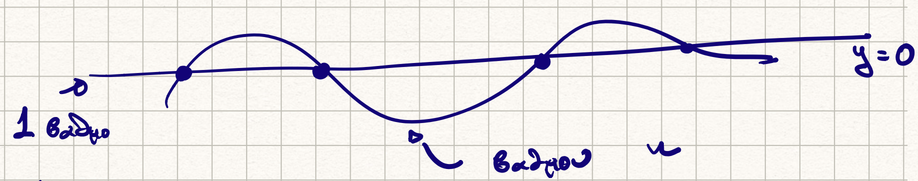
$I_{p_i}(C_1, C_2)$ θα πρέπει να οριστεί κατάλληλα.

$f(x)$ πολ. βαθμού n $\qquad f(x) \in k[x,y]$

$f(x) \qquad k[x,y,z]$ ομογεν

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i z^{n-i}$$

με το $y=0$ έχει τομή όσες είναι ρίζες



Το πολυώνυμο έχει $n \cdot 1 = n$ ρίζες „με μετρημένη την πολ/τα"

$$f(x) = a_0 \prod_{j=1}^{m} (x - \alpha_j)^{n_j}$$ γραφή ως προς τις ρίζες

$$R_\alpha = \left\{ \frac{g(\alpha)}{f(x)} : f(x), g(x) \in \bar{k}[x],\ f(\alpha) \neq 0 \right\} \subset Quot(R)$$ δακτύλιο

S πολ/κο σύνολο $\qquad R \setminus m_\alpha$

$\underbrace{m_\alpha = \langle x - \alpha \rangle}$ ιδεώδες των πολυωνύμων που μηδενίζονται στο α

$a, b \in S \quad a \cdot b \in S$

$R \cdot S^{-1}$ εντοπισμός του δακτυλίου στο πολ/κο σύνολο S

$A^1_k \qquad V(\alpha) = m_\alpha$

Ακ. περιοχή R
$\langle 0 \rangle$ πρώτο.
$R(R \setminus \langle 0 \rangle)^{-1} = Quot(R)$

προσθέσει αντιστρέψιμα στοιχεία.

$R = \bar{k}[x] \subset R_\alpha \subset \bar{k}(x) = Quot(x)$

Αφού πρόσθεσα αντιστρέψιμα έχω αφαιρέσει ιδεώδη.

$\alpha \neq b \quad \langle x - b \rangle R_\alpha = R_\alpha \qquad x - b$ αντιστρέψιμο

$\mathbb{Z} \longrightarrow Quot(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

πολλά ιδεώδη η $\mathbb{Z}$

(έχει μόνο το 0, $\mathbb{Q}$ ως ιδεώδη)

Ο R_α είναι "τοπικός" είναι ένας δακτύλιος με μόνο ένα μέγιστο ιδεώδες.

$$\langle f(x)\rangle_{R_\alpha} = \langle f(x)\rangle R_\alpha = \langle (x-\alpha)^n\rangle$$

$$f = (x-\alpha)^n\, g(x)$$ μονάδα στον R_α

$g(\alpha)\neq 0$

$$\frac{R_\alpha}{\langle (x-\alpha)^n\rangle} = \frac{R_\alpha}{\langle f\rangle} \xrightarrow{\dim_k} n$$

Τα στοιχεία $1, (x-\alpha), (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^{n-1}$ βάση του πηλίκου.

Συμπέρασμα: Σε μια μεταβλητή η έννοια της πολ/τας ρίζων εκφράζεται μέσω θ. δακτυλίων.

Πολ/τα της ρίζας α του f

$$\dim_k \frac{R_\alpha}{\langle f\rangle}$$

localization "φάγαμε τις άλλες ρίζες"

Παρατήρηση: Κοντά στον εντοπισμού είναι η έννοια την πλήρωσης του δακτυλίου ως προς τοπικές συναρτήσεις

$$\bar{K}[[x-\alpha]] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-\alpha)^i \longrightarrow (a_i)$$

$\cup$

$K[x]$

κάθε πολ. που δεν μηδενίζεται στο α αντιστρέφεται

$$\frac{1}{x-b} = \left(-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{b}} = \left(-\frac{1}{b}\right)\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{x}{b}\right)^v \in k[[x]]$$ $\alpha = 0$

$b\neq 0$

$$\frac{1}{x-a+(a-b)} = \frac{1}{(\alpha-b)}\;\frac{1}{1+\frac{x-\alpha}{a-b}} = \frac{1}{\alpha-b}\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b-a}\right)^v x^v$$

$0\neq$

Το περάσω σε τοπικούς δακτυλίους επιτρέπει αντιστρέψει στοιχεία του δακτυλίου.

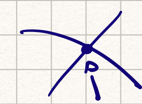
$\underline{P} = (a, b)$ $\qquad\qquad$ $R = \bar{k}[x, y]$

$$R_P = \left\{ \frac{G(x,y)}{F(x,y)} : F(x,y), G(x,y) \in R, \ F(\alpha, b) \neq 0 \right\}$$

Εντοπισμός σε δύο μεταβλητές $\qquad S = R \setminus \underbrace{\overbrace{\langle x-a, y-b \rangle}}_{}$

μέγιστο άρα πρώτο ιδεώδες

$$I_p(V(f), V(g)) = \dim_{\bar{k}} \frac{R_p}{\langle f, g \rangle}$$



$f = ax + by$

$g = cx + dy$ $\qquad \underline{ad - bc \neq 0}$

$\underline{\text{Τομή}}$ $\qquad \left.\begin{aligned} \alpha x + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}\right\} (x, y) = (0, 0)$

$R_p \qquad \langle ax + by, cx + dy \rangle = \langle x, y \rangle$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \Rightarrow$$

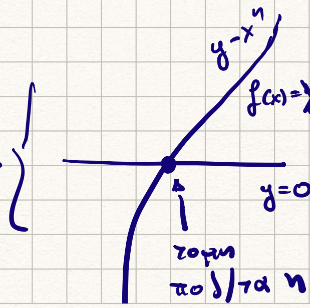
$$x, y \in \langle f, g \rangle$$

$$\langle f, g \rangle \in \langle x, y \rangle$$

$$\dim_k \frac{R_p}{\langle f, g \rangle} = \dim \frac{R_p}{\langle x, y \rangle} \cong \dim_k k = 1.$$

$\underline{f = y}$

$g_n = y - x^n$ $\qquad V(f) \cap V(g_n) = \Big\{$

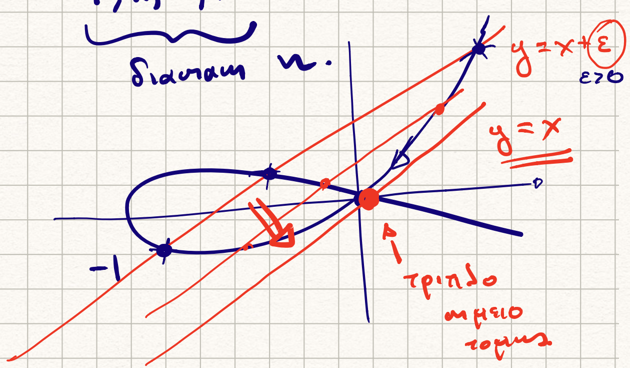


το 0 είναι ρίζα πολ/τας n

$$\frac{R_p}{\langle f, g_1\rangle} = \frac{k[x]_0}{\langle g_n\rangle} \rightsquigarrow k\text{-βάση } \underbrace{1, x, \dots, x^{n-1}}_{\text{διάσταση } n.}$$

$g = y^2 - x^2(x+1)$

$f = y - x + \varepsilon$



$$\langle f, g\rangle = \langle y-x,\ y^2 - x^2(x+1)\rangle = \langle y-x,\ x^3\rangle$$

$$R_p/\langle f, g\rangle \leftarrow \underbrace{1, x, x^2}_{\text{βάση}}$$ πολ/τα τομής είναι 3

Ιδιομορφίες

Μη ιδιόμορφα σύνολα στην αλγεβρική γεωμετρία $\rightsquigarrow$ πολ/τα διαφ.

Ορισμός. Τοπική έννοια: ένα σημείο P είναι ιδιόμορφο ή μη αρκεί να το τσεκάρουμε σε περιοχή του P affine.

$Y \subseteq \mathbb{A}^n_k$

$f_1, \dots, f_t \in k[x_1, \dots, x_n]$ γεννήτορες του $I(Y)$.

Το Y είναι μη ιδιόμορφο ανάγωγο αν το rank $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right)$ είναι $n-r$ όπου r είναι η διάσταση του Y.

Παρατήρηση Έχουμε σε πολ/δακτυλίους παραγώγους ανεξάρτητα από την έννοια του ορίου.

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial c}{\partial x_j} = 0 \qquad \frac{\partial (f+g)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial f \cdot g}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Πρόβλημα είναι η <u>χαρακτηριστική p</u> $\frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{p} = p x_j^{p-1} = 0$

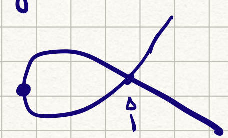
<u>Παραδείγματα</u> $V(f)$ $f \in k[x_1, \dots, x_n]$

$\dim V(f) = n-1$ $n=2$ αλγεβρική καμπύλη.

<u>rank</u> $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \rightsquigarrow n-(n-1) = 1$

Δηλαδή το p είναι singular αν $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$

$f = y^2 - x^2(x+1)$



(0,0) είναι singular.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{-3x^2 - 2x}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \underline{y=0}$ σημείο στην καμπύλη

$x^2(x+1) = 0$

$\rightsquigarrow x = 0$

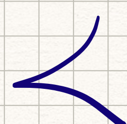
$\rightsquigarrow x = -1$

Το $(0,0)$ είναι singular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

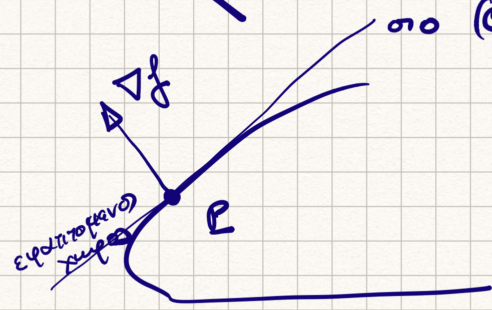
$(-1,0)$ δεν είναι singular $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(-1,0)} = -3+2 = -1$

$y^2 = x^3$

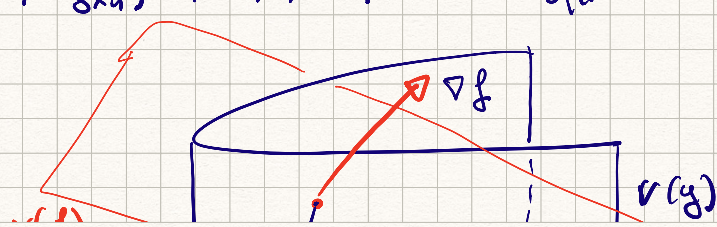


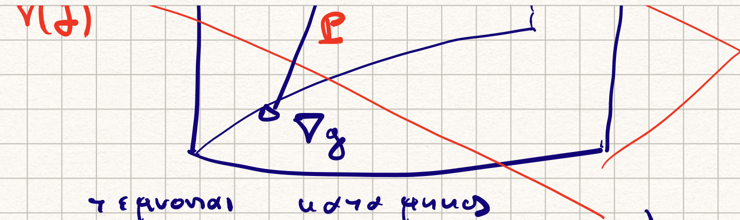
είναι ιδιόμορφη στο $\underline{(0,0)}$.

$V(f)$



$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \neq (0,0,\dots,0)$ η συνθήκη ομαλότητας





Αν $V(f)$ και $V(g)$ τέμνονται κατά μήκος μιας καμπύλης (διάλαση η τομή έχει διάσταση 1)

Τότε η συνθήκη ~~μη~~ ομαλότητας είναι ισοδύναμη με το ότι ∇f, ∇g δεν είναι συγγραμμικά

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \nabla f \\ \nabla g \end{matrix}$$

Η έννοια της singularity εξαρτάται από την

$$\mathbb{A}^m_k \hookrightarrow Y \subset \mathbb{A}^n_k$$

Θέλουμε έναν ορισμό ανεξάρτητο της εμφύτευσης

Αν R noether local ring m το μέγιστο ιδεώδες

Ο R λέγεται regular local ring

$$\dim_{R/m} m/m^2 = \dim R$$

Το $p \in Y$ είναι μη ιδιόμορφο αν και μόνο αν

$k[Y]_p$ να είναι regular local ring.