ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Αποφαντική Λογική

Προκαταρκτικά
Σ πεπερασμένο αλφάβητο $\{0,1\}$
Σ^* (αστέρι Kleene) $= \{w / w$ πεπερ. ακολ. από στοιχεία του $\Sigma\}$
εκφράσεις, συμβολοσειρές, λέξεις

Αλγόριθμοι: Επεξεργάζονται στοιχεία του Σ^*

$L \subseteq \Sigma^*$, L διαγνώσιμο αν υπάρχει αλγόριθμος που δεδομένης μιας έκφρασης αποφαίνεται αν η έκφραση ανήκει στη γλώσσα ή όχι.

Συναρμογή

Αποφαντική Λογική:
Αλφάβητο
$(,), \neg, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow$
$A_1, A_2, \ldots$ αποφαντικά σύμβολα
Έκφραση: πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του αλφαβήτου
π.χ. $(A_1 \land ($ (ή λέξη)
Καλοσχηματισμένοι τύποι (ΚΣΤ)
Αναδρομικοί Ορισμοί
Επαγωγικές Αποδείξεις
ΚΣΤ: (αναδρομικός ορισμός)
1) Τα αποφαντικά σύμβολα είναι ΚΣΤ
2) Αν ϕ, ψ ΚΣΤ τότε $(\neg\phi), (\phi \land \psi), (\phi \lor \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ είναι επίσης ΚΣΤ
ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ↗ π.χ. $\neg\phi$ δεν είναι ΚΣΤ
(λείπουν οι παρενθέσεις)

Επαγωγικές Αποδείξεις: $p(n)$

1) $p(0)$
2) $p(k) \to p(k+1)$

ή

1) $p(0), p(1), p(2)$
2) $p(k-1), p(k), p(k+1) \to p(k+2)$

ή

1) $p(0)$
2) $p(0), \dots, p(k-1) \to p(k)$

ή

χωρίς Ε.Β.
$[\forall k < n \; p(k)] \to p(n)$

Επαγωγικές Αποδείξεις σε Αναδρομικούς Ορισμούς:
Έστω ότι θέλουμε να δείξουμε ότι όλοι οι ΚΣΤ έχουν την ιδιότητα P.
1) P ισχύει για αποφαντικά σύμβολα
2) Αν P ισχύει για φ, ψ, την αποδεικνύω για $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, ...

Παράδειγμα
Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τύπο: "αριθμός των (" = "αριθμ. των
Βάση
Έστω A αποφαντικό σύμβολο, τότε ισχύει (και τα δύο είναι μηδέν
Επ. Βήμα
Έστω φ, ψ έχουν την ιδιότητα, τότε:
• $(\varphi \wedge \psi)$. Έστω $\alpha_\varphi, \delta_\varphi$ ο αριθμός των αριστερών και δεξιών παρενθέσεων στο φ, αντίστοιχα. Έστω α_ψ, δ_ψ όμοια. Τότε
$\alpha_{(\varphi \wedge \psi)} = \alpha_\varphi + \alpha_\psi + 1$ .... ισχύει
Τα υπόλοιπα όμοια.

Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν τύποι με 2,3,6 σύμβολα αλλά υπάρχουν με οποιοδήποτε άλλο αριθμό.
1) σύμβολα ✓
2) Οτιδήποτε πιο σύνθετο θα έχει ≥ 3.
Για 6 αν πάρουμε όλα θα δούμε ότι δεν γίνεται
Για 4: $(\neg\varphi)$
Για 5: $(\varphi \wedge \psi)$
Με επαγωγή πάμε τρία-τρία $(7,8,9)$, $(10,11,12)$, ...

Σημασιολογία (Semantics)

$\{0,1\}$, $\{t,f\}$, $\{T,F\}$

Πίνακες Αληθοτιμών

Συναρτήσεις : $\{T,F\} \to \{T,F\}$

$\{T,F\}^2 \to \{T,F\}$

$\Pi_\wedge$

$\Pi_\to(F,F) = T$

$\Pi_\to(F,T) = T$

$\Pi_\to^{-1}(F) = (T,F)$

Απονομή Αλήθειας

$v: \{A_1, \dots\} \to \{T,F\}$

επέκταση $\bar{v}: ΚΣΤ \to \{T,F\}$ έτσι ώστε να «ακολουθούνται» οι πίνακες αλήθειας

Ταυτολογία: για κάθε απονομή αλήθειας το $\bar{v}$ δίνει πάντα T

Αντιλογία: για κάθε απονομή αλήθειας το $\bar{v}$ δίνει πάντα F

Τύπος ικανοποιήσιμος: υπάρχει απονομή αλήθειας τ.ω. το $\bar{v}$ να δίνει T.

Αν Σ σύνολο από ΚΣΤ τότε $\Sigma \Vdash \varphi$ ή $\Sigma \vDash \varphi$ αν για κάθε απονομή αλήθειας που ικανοποιεί όλο το Σ τότε αυτή η απονομή ικανοποιεί το φ (το $\bar{v}$ δίνει T)

$\emptyset \vDash \varphi$ ανν φ ταυτολογία.

Σύνολο Σ από ΚΣΤ καλείται ικανοποιήσιμο ανν (εξ ορισμ.) υπάρχει v που ικανοποιεί (αληθεύει) όλα τα στοιχεία του Σ

Θεώρημα Συμπάγειας

Σ είναι ικανοποιήσιμο ανν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του είναι ικανοποιήσιμο.

Απόδειξη

"$\Leftarrow$" Υπόθεση: Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο. Συμπέρασμα: Σ ικανοποιήσιμο. (1)

$v(A) =$;

αν $\neg A \in \Sigma$ τότε $v(A) = F$

αν $A \in \Sigma$ τότε $v(A) = T$

αν $A \notin \Sigma$ και $\neg A \notin \Sigma$ τότε $\Sigma \cup \{A\}$ ή $\Sigma \cup \{\neg A\}$ έχει την ιδιότητα (1) και συνεχίζουμε όπως πριν.

Αυστηρά

Ορίζω $\Delta_0 = \Sigma$

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{A_{n+1}\} & \text{, αν } \Delta_n \cup \{A_{n+1}\} \text{ πεπ. ικαν.} \\ \Delta_n \cup \{\neg A_{n+1}\} & \text{, αν } \Delta_n \cup \{\neg A_{n+1}\} \text{ πεπ. ικαν.} \end{cases}$$

Αν Δ_n πεπ. ικαν. τότε $\Delta_n \cup \{A_{n+1}\}$ πεπ. ικαν. ή $\Delta_n \cup \{\neg A_{n+1}\}$ πεπ. ικαν. (πρέπει να το αποδείξω για να συνεχίσω).

Έστω $\Delta_n \cup \{A_{n+1}\}$ και $\Delta_n \cup \{\neg A_{n+1}\}$ όχι πεπ. ικαν.

Έστω $T_1 \cup \{A_{n+1}\}$ με $T_1 \subseteq \Delta_n$ και $T_2 \cup \{\neg A_{n+1}\}$ με $T_2 \subseteq \Delta_n$ μη ικανοποιήσιμα. Τότε $T_1 \cup T_2$ μη ικανοπ., άτοπο. Ορίζω την v όπως πριν και τελείωσα.

Σ αλφάβητο αποφαντικής λογικής

$K\Sigma T \subseteq \Sigma^*$

(Διαγνώσιμο να αποφανθεί αν έχει σύνολο ή όχι)

Είναι το $K\Sigma T$ διαγνώσιμο; <u>ΝΑΙ</u>

1) Ελέγχουμε αν περικλείεται από παρενθέσεις

Εκτός αν είναι αποφαντικό ~~σύνολο~~ σύμβολο.

2) Αν είναι της μορφής $(\neg\phi)$ ελέγχουμε αν ϕ $K\Sigma T$

3) Εντοπίζουμε το πρώτο σημείο μετά την πρώτη αριστερή παρένθεση όπου αριστερές παρενθέσεις = δεξιές παρενθέσεις
4) Ελέγχουμε αν ακολουθεί αποφαντικός σύνδεσμος και υποβάλουμε σε αναδρομικό έλεγχο τα δύο μέρη της ακολ. αριστερά και δεξιά του συνδέσμου (πλην αρχικής και τελικής παρένθεσης)

<u>Πρωτοτάξια Λογική</u>

Αλφάβητο: (,)

$\neg, \to$

$=$

$v_1, v_2, v_3, \dots$ — η διαφορά αυτών με τα αποφαντικά σύμβολα είναι ότι τα αποφ. συμβ. παίρνουν τιμές 0 και 1 ενώ αυτά τιμές από ένα "σύμπαν" τιμών

$\forall$

P κατηγορηματικά σύμβολα
f συναρτησιακά σύμβολα
c σύμβολα σταθεράς

Άρα έχουμε <u>πολλά αλφάβητα.</u>

Όροι: (αναδρομικός ορισμός)
1) Τα σύμβολα σταθερών είναι όροι, καθώς και οι μεταβλητές.
2) Αν $t_1, \dots, t_n$ όροι και f n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο τότε όρος είναι και ο $f t_1 \dots t_n$ (συμβ. $f(t_1, \dots, t_n)$)

Ατομικοί Τύποι:
1) Αν t_1, t_2 όροι τότε το $= t_1 t_2$ είναι Ατομ. Τύπος (συμβ. $t_1 = t_2$)
2) Αν R n-θέσιο κατηγορηματικό σύμβολο και $t_1, \dots, t_n$ όροι τότε $R t_1 \dots t_n$ Α.Τ. (συμβ. $R(t_1, \dots, t_n)$)

ΚΣΤ:
1) Ατομικοί τύποι.
2) $(\neg\phi)$, $(\phi \to \psi)$, $\forall v. \phi$, όπου v μεταβλητή και ϕ, ψ ΚΣΤ
Παρενθέσεις θα παραλείπονται.

Συντομογραφίες

$\exists v \phi \equiv (\neg \forall v (\neg \phi))$

$(\phi \vee \psi) \equiv ((\neg\phi) \rightarrow \psi)$

$(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg((\neg\phi) \vee (\neg\psi)))$

$(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$

Σημασιολογία

Δομή (Ερμηνεία) Πρωτοτάξιας Γλώσσας:

1) A μη κενό σύνολο (σύμπαν) $|\mathfrak{A}|$
2) Για κάθε P της γλώσσας, σχέση $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$
3) Για κάθε f της γλώσσας, συνάρτηση $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$
4) Για κάθε c της γλώσσας, $c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$

Αποτίμηση

$s : \{u_1, u_2, \dots\} \rightarrow A = |\mathfrak{A}|$

$s(v/a)(v_i) \overset{\text{!}}{=} \begin{cases} s(v_i), & \text{αν } v_i \neq v \\ a, & \text{αν } v_i = v \end{cases}$ $\leftarrow s(v|a)$

s αποτίμηση, v μεταβλητή, $a \in A$

Έστω t όρος. $t^{\mathfrak{A}}[s]$ ← αποτίμηση

1) Αν $t = c$, $t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}}$.
2) Αν $t = v$, $t^{\mathfrak{A}}[s] = s(v)$
3) Αν $t = f t_1 \dots t_n$, $t^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}})$

Έστω ϕ ΚΣΤ, $\mathfrak{A}$, s. Λέμε $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ (Tarski) αν η δομή $\mathfrak{A}$ επαληθεύει (ικανοποιεί) τον ΚΣΤ ϕ για την αποτίμηση s.

Αναδρομικός ορισμός της αλήθειας:

$\mathfrak{A} \models t_1 = t_2 [s]$ ανν $t_1^{\mathfrak{A}}[s] = t_2^{\mathfrak{A}}[s]$.

$\mathfrak{A} \models P t_1 \dots t_n [s]$ ανν $(t_1^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{A}}$ (ή $P^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}})$)

Αν ϕ είναι $(\neg\psi)$ τότε:

$\mathfrak{A} \models (\neg\psi)[s]$ ανν $\mathfrak{A} \not\models \psi[s]$

Αν ϕ είναι $(\psi \to \chi)$ τότε:

$\mathfrak{A} \models (\psi \to \chi)[s]$ ανν $(\mathfrak{A} \models \psi[s] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \chi[s])$

Αν ϕ είναι $\forall v \psi$ τότε:

$\mathfrak{A} \models \forall v \psi[s]$ ανν $\mathfrak{A} \models \psi[s(v|a)]$, $\forall a \in |\mathfrak{A}|$

Να αποδειχθεί ότι: $\mathfrak{A} \models \exists v \psi[s]$ ανν $\exists a \in |\mathfrak{A}|$ τ.ω. $\mathfrak{A} \models \psi[s(v|a)]$. Έχουμε:

$\mathfrak{A} \models \exists v \psi[s] \iff$ ~~[illegible]~~ $\iff$
$\mathfrak{A} \models (\neg \forall v (\neg\psi))[s] \iff \mathfrak{A} \not\models \forall v (\neg\psi)[s] \iff$ δεν ισχύει ότι $\forall a \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models \neg\psi[s|a] \iff \exists a \in |\mathfrak{A}|$ τ.ω. $\mathfrak{A} \not\models \neg\psi[s(v|a)] \iff \exists a \in |\mathfrak{A}|$ τ.ω. $\mathfrak{A} \models \psi[s(v|a)]$ ο.ε.δ.

$\forall v \phi$
$\exists v \phi$

$$\left(\forall x\, R(\underset{\text{δεσμ.}}{x},\underset{\text{ελεύθερη}}{y}) \to \left(P(\underset{\text{ελεύθερη}}{z}) \land \exists y\, Q(\underset{\text{δεσμ.}}{y})\right)\right)$$

Θεώρημα

Ατυπη γραφή: Η αλήθεια ή το ψέμα στην $\mathfrak{A}$ ενός ϕ για την απονομή s, εξαρτάται μόνον από τις τιμές της s για τις μεταβλητές που έχουν ελεύθερη εμφάνιση στον ϕ.

Μαθηματική γραφή: Enderton.