23/5/2013

Διαγνώσιμες ⇒ ορίσιμες στη $\mathfrak{N}$
και αντιπροσωπεύσιμη

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$A_E \vdash \forall v [\varphi(S^a, v) \leftrightarrow v = S^{f(a)}(0)]$

Θεώρημα

Μια συνάρτηση είναι συναρτησιακά αντιπροσωπεύσιμη αν ως σχέση είναι αντιπροσωπεύσιμη.

Απόδ.

Έστω ότι η f είναι συναρτησιακά αντιπροσωπεύσιμη τότε είναι αντιπροσωπεύσιμη

$$f(a) = b \qquad (a,b) \in f.$$

$$\boxed{A_E \vdash \forall v\, \varphi(a,v) \leftrightarrow v = f(a)} \quad ①$$

$f(a) = b$ τότε $A_E \vdash \varphi(S^a, S^b)$

$f(a) \neq b$ τότε $A_E \vdash \neg\varphi(S^a, S^b)$

①

Από ① συμπέρασμα ??

$A_E \vdash \varphi(a,b) \leftrightarrow b = f(a)$

Αλλά γνωρίζουμε $\mathfrak{N} \models b = f(a)$

Άρα, $A_E \vdash b = f(a)$

$A_E \vdash \varphi(a,b)$

Επειδή $\mathbb{N} \models f(a) \neq b$

συμπεραίνω $A_E \vdash \neg(f(a) \neq b)$

Άρα, $A_E \vdash \neg\varphi(a,b)$.

$(\Leftarrow)$

Έστω ότι η f είναι αντιπρ. (σχέση)

τότε γνωρ. αντιπρ.

Έστω ότι $\exists\, \varphi$.

$f(a)=b$ τότε $A_E \vdash \varphi(a,b)$

$f(a) \neq b$ τότε $A_E \vdash \neg\varphi(a,b)$

θ;

$A_E \vdash \forall v [(\theta(a,v) \leftrightarrow v = f(a)]$

Δεν αρκεί να αποδείξουμε

$A_E \vdash \theta(a,b) \leftrightarrow b = f(a)$.

Αρκεί να αποδείξουμε

(A) $A_E \vdash \forall v\, (\theta(a,v) \to v = f(a))$

(B) $A_E \vdash \forall v\, (v = f(a) \to \theta(a,v))$.

(B) Για το B αρκεί να αποδείξουμε

$A_E \vdash \theta(a, f(a))$ *

για το τυχόν v όχι κατ' ανάγκη

φυσικός $v = f(a) \to \theta(a,v)$

* Αυτό ισχύει για οποιοδήποτε θ

αντιπροσωπεύει τη f ως σχέση.
Άρα για το B που κάνει η φ, αλλά για το A θα χρειαστεί άλλο θ που αντιπροσ. f ως σχέση, το οποίο κάνει και για το B.

(A) Έχω φ, θέλω θ.
$$\theta(\omega,v) = \phi(\omega,v) \wedge (\forall z)(z<v \to \neg\varphi(\omega,z))$$

Πρέπει να δείξω πρώτα ότι η θ αντιπροσωπεύει την f ως σχέση

(1) $b=f(a)$ τότε $A_E \vdash \varphi(a,b) \wedge \forall z(z<b \to \neg\varphi(a,z))$

(2) $b \neq f(a)$ τότε $A_E \vdash \neg$ ....

(1) $A_E \vdash \varphi(a,b)$ b φυσικός
$A_E \vdash \forall z(z<b \to \neg\varphi(a,z))$

Παίρνω τυχαίο z αν $z<b$ και b φυσικός τότε $z=0$, $z=S0$, ...

Για $z<b$ z δεν ανήκει στο διάγραμμα τότε $A_E \vdash \neg\varphi(a,z)$ (από υπόθεση)

② $A_E \vdash \neg\varphi(a,b)$

Ⓐ Χρειάζεται να αποδείξω
$A_E \vdash \forall v(\theta(a,v) \rightarrow v = f(a))$

$$\left.\begin{array}{l} \theta(a,v) \\ A_E \vdash \varphi(a,v) \\ \quad\quad \text{και} \\ A_E \vdash \forall z(z < v \rightarrow \neg\varphi(a,z)) \end{array}\right\}$$

θ.ν.δ.ο. $v = f(a)$
αν δείξω ότι $v > f(a)$ και $v < f(a)$
καταλήξουν σε άτοπο. τέλειωσα

Αν $v < f(a)$, αφού $f(a)$ φυσικός
$v = S(0), SS(0)$
άρα αφού $f(a) \neq v$ τότε $A_E \vdash \neg\varphi(a,v)$
και $A_E \vdash \varphi(a,v)$ από πριν, άτοπο.

$v > f(a)$ ← άσκηση

30/5/2013

*Θα έχει θέμα με ύλη πριν την πρόοδο.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

*Οι σελίδες θα αναφέρονται στο βιβλίο του Enderton (αγγλική εκδ.).

L_S, $\mathfrak{N}_S$, A_S ⇝ είναι άπειρα
L, $\mathfrak{N}$, A_E ⇝ πεπερασμένα

$A_S \vdash \varphi$, $A_S \models \varphi$.

Ασκ. 4 σελ. 193

Αποδείξτε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι ορίσιμο στην $\mathfrak{N}_S$ ανν A πεπερασμένο ή A^c (συμπλήρωμα A) πεπερ.

$a \in A$ ανν $\mathfrak{N}_S \models \phi(a)$

Άρα, υπάρχει ψ χωρίς ποσοδείκτες

$a \in A$ ανν $\mathfrak{N}_S \models \psi(a)$.

$$\psi(x) \longleftrightarrow \underbrace{(\vee \cdots \vee)}_{\sigma_1} \wedge (\vee \cdots \vee) \wedge \cdots \wedge \underbrace{(\vee \cdots \vee)}_{\sigma_k}$$

$\uparrow$
ατομικός τύπος ή άρνηση ατομικού τύπου

Έστω $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ τα σύνολα που ορίζουν οι τύποι $\sigma_1, \dots, \sigma_k$

$$A = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \dots \cap \Sigma_k$$

Εάν ένα Σ_i είναι πεπερασμένο

$$\Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_k \subseteq \Sigma_1.$$

Αν όλα έχουν πεπερασμ. συμπλήρ. Σ_i^c πεπερ.

$$\Sigma_1^c \cup \dots \cup \Sigma_k^c = (\Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_k)^c \text{ πεπερ}$$

για κάθε i.

Το Σ_i είναι $\sigma = \theta_1 \vee \dots \vee \theta_\lambda$

$\theta_1, \dots, \theta_\lambda$

$\Sigma = \theta_1 \vee \dots \vee \theta_\lambda$

Αν όλα θ_i είναι πεπερ.

Σ πεπερ. Αν ένα θ_i $=1$

θ_i^c πεπερ

$$\Sigma^c \subseteq \theta_i^c \text{ πεπερ.}$$

θ_i : ισότητα ή άρνηση.

θ_i κενό ή μονοσύνολο.

Αντίστροφα, ένα σύνολο είναι πεπερ. αν το συμπλ. ή ένωση πεπερ.

Άσκ 5.

Να αποδειχθεί ότι η σχέση $<$ δεν είναι ορίσιμη.

Λύση.

Έστω $R(x,y)$ διμελής ορίσιμη στην N_S σχέση

Διάγραμμα απόδειξης:

$$x = S^t y \quad (\text{ατομ. τύποι})$$

[αυτή ή το συμπλήρ. της καλύπτ. από ευθείες, η [illegible] δεν καλύπτ. από πεπερ. ευθείες άρα δεν είναι ορίσιμη.

Άσκ 6.

$Th\,N_S$ δεν είναι πεπερ. αξιωματικοποιήσιμη

Λύση

Ένα πεπερ. υποσύνολο A του A_S δεν είναι ισοδύναμο με το A_S

$Sx \neq x$, $SSx \neq x$, $SSSx \neq x$

$\{0,1,2,3,4\}$ $\quad Sx \neq x$

σελ. 223.

$(\mathbb{N}, \cdot, E)$

Να αποδείξετε ότι η Ψ είναι ορίσιμη

λύση

$\forall y (y \cdot x = x)$ ορίζει το 0

$\forall y (y \cdot x = y)$ ορίζει το 1

$a^x \cdot a^y = a^2$ (0 ή 1)

$\Phi(x, y, z)$

$(\exists a) (a \neq 0 \,\&\, a \neq 1 \,\&\, a^x a^y = a^2)$

Ασκ. 3. διαλεκτικός

ω-complete. T καλείται ω-complete για έναν οποιοδήποτε τύπο

$\phi_n^x \in T, \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $\forall x \phi \in T$

Αν T συνεπής & ω-complete

$A_E \subseteq T$ τότε $T = Th\mathfrak{N}$

$T \subseteq Th\mathfrak{N}$ άσκηση

$Th\mathfrak{N} \subseteq T$ απόδειξη:

Θεωρώ $\phi \in Th\mathfrak{N}$

Πρέπει να δ.ο. $\phi \in T$.

Με επαγωγή στον αριθμό των ποσοδεικτών (φ σε κανονική προδεσμευτική μορφή)

ϕ είναι $\exists y\, \psi(y)$

Υπάρχει φυσικός n έτσι ώστε $\psi(n) \in Th\mathcal{N}$
Άρα, $\psi(n) \in T$
Άρα, $\exists y\, \psi(y) \in T$

ϕ είναι $\forall y\, \psi(y)$
Άρα, $\psi(n) \in Th\mathcal{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Άρα, από επαγ. υπόθεση $\psi(n) \in T$, $\forall n \in \mathbb{N}$
από ω-complete βγαίνει

$\psi(n)$ αποδείξιμο τότε $\exists y\, \psi(y)$ αποδείξιμο
$\psi(n)$ αποδείξιμο $\forall n \in \mathbb{N}$ ~~τότε~~ $\forall y\, \psi(y)$ —

Αντιπροσωπευσιμότητα

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$G_f = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$ αντιπροσ. σχέση στο A_E

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τύπος $\phi(x,y)$ τ.ω. αν $f(n) = m$ τότε $A_E \vdash \phi(n,m)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$A_E \vdash \exists! y\, \phi(n,y)$

Γνωρίζω από αντιπροσ. του G_f ότι υπάρχει $\psi(x,y)$

$\phi(x,y)$ ορίζεται

Προσοχή Για την ψ που αναπαρ. το G_f ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists!\, m \in \mathbb{N}\quad A_E \vdash \psi(n,m)$

Αλλά, εν γένει $\boxed{\text{δεν}}$ ισχύει ότι

$\forall n \in \mathbb{N}\quad A_E \vdash \exists!\, y\ \psi(n,y)$

Πως θα ορίσω τη ϕ;

$\phi(x,y)$ είναι

$$\boxed{\psi(x,y)\ \&\ \forall z<y\ \neg\psi(x,z)}$$

Πρέπει να αποδείξω

$f(n)=m$, τότε $A_E \vdash \phi(n,m)$

$A_E \vdash \exists!\, y\ \phi(n,y)$

(Έστω $y_1<y_2$ τότε $y_1>y_2$ ή $y_1<y_2$ $\Rightarrow \forall z<y,\ \neg y \dots$)

(Δημητρακόπουλο στην Αναπαρασ. - Αναπαράσ.)