18-4-2013

$\mathfrak{N}_s = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}_s}, s^{\mathfrak{N}_s} \rangle$

Φυσικοί Αριθμοί με διάδοχο

$Th\mathfrak{N}_s = \{ \sigma \mid \sigma$ απόφανση & $\mathfrak{N}_s \models \sigma \}$

Θα αποδείξαμε ότι $Th\mathfrak{N}_s$ είναι αξιωματικοποιήσιμη & $Th\mathfrak{N}_s$ διαγνώσιμο

As τα ακόλουθα αξιώματα

$S_1.\quad \forall x\ Sx \neq 0$

$S_2.\quad \forall x \forall y\ (Sx = Sy \rightarrow x = y)$

$S_3.\quad \forall y\ (y \neq 0 \rightarrow \exists x\ Sx = y)$

$S4.1\quad \forall x\ (Sx \neq x)$

$S4.2\quad \forall x\ (SSx \neq x)$

$S4.3\quad \ldots$

$CnAs$ (σύνολο λογικών συνεπαγωγών όλων των αξιωμάτων).

Προφανές $CnAs \subseteq Th\mathfrak{N}_s$

(Η $\mathfrak{N}_s$ επαληθεύει τα αξιώματα)

Θα αποδείξουμε ότι

$CnAs = Th\mathfrak{N}_s$

Πόρισμα

$Th\mathfrak{N}_s$ διαγνώσιμο σύνολο

Υπενθύμιση: $\underbrace{T \subseteq \Sigma}_{\text{Θεωρίες}}$, Σ συνεπής, T πλήρης

Τότε $T = \Sigma$

Εχουμε $Cn A_s \subseteq Th \mathfrak{N}_s$

Για να δείξουμε την ισότητα, αρκεί να δείξουμε ότι $Cn A_s$ πλήρης

Η πληρότητα θα δειχθεί με βάση το «test» Łos-Vaught.

Πρέπει να δείξουμε : $Cn A_s$ 1) Δεν έχει πεπερασμένα μοντέλα. 2) ∃κ άπειρος πληθάριθμος ώστε οποιαδήποτε δύο μοντέλα του $Cn A_s$ πληθάριθμου κ ισόμορφα.

Αν $\mathfrak{A} \models Cn A_s$ τότε $|\mathfrak{A}|$ δεν είναι πεπερασμένο

Εστω $\mathfrak{A} \models Cn A_s$

Θα προσπαθήσω να καταλάβω πως είναι $|\mathfrak{A}|$

$0^{\mathfrak{A}} \rightarrow S^{\mathfrak{A}} 0^{\mathfrak{A}} \rightarrow \cdots$

$\rightarrow * \rightarrow a \rightarrow Sa \rightarrow SSa \rightarrow \cdots$

$\mathbb{Z}$-chain

Συμπέρασμα

$|\mathfrak{A}|$ αποτελείται από ένα «σταθερό» μέρος & από αριθμό $\mathbb{Z}$-chains

Αν δύο δομές έχουν ίδιο αριθμό $\mathbb{Z}$-chain είναι ισομορφικές

Άρα, ισχύουν οι προϋποθέσεις Łos-Vaught

Άρα, $Cn A_s$ πλήρης ΟΕΔ.

Έστω $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models Cn\,A_S$
Έστω $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| = \kappa$ υπεραριθμήσιμος
Έστω ότι $|\mathfrak{A}|$ περιέχει λ Z chain

$$|\mathfrak{A}| = \lambda \aleph_0 + \aleph_0$$

Άρα, $\lambda = \kappa$

Απαλοιφή Ποσοδεικτών

$\mathfrak{A}$ επιδέχεται απαλοιφή ποσοδεικτών αν για κάθε τύπο ϕ υπάρχει ψ χωρίς ποσοδείκτες έτσι ώστε

$$\mathfrak{A} \models \phi \leftrightarrow \psi[s]$$

για οποιοδήποτε αποτίμηση

Θα αποδείξαμε ότι $\mathfrak{N}_S$ επιδέχεται απαλοιφή ποσοδεικτών

ϕ

1) ϕ είναι της μορφής $\exists x_1 \exists x_2 \ \exists x_n \psi$
όπου ψ χωρίς ποσοδείκτες

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \psi \underset{\mathfrak{N}_S}{\equiv} \exists x_1 \cdots \exists x_n \big((\ ) \vee \cdots \vee (\ ) \big)$$

Μπορώ να υποθέσω ότι
$\exists x_1 \cdots \exists x_n$ (σύζευξη ατομικών ή αρνήσεων)
Μπορώ να υποθέσω ότι
$\exists x$ (σύζευξη...)
Μπορώ να υποθέσω ότι όλοι οι συζευκτικοί έχουν X

$\exists x \; \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$

$$S^n x = S^k u$$

$$S^n x \neq S^k u$$

Αν όλοι οι ατομικοί τύποι αρνήσεις τότε εύκολο.

Άρα κάποιος τουλάχιστον τύπος

$$S^m x = t$$

Οι άλλοι $S^{\lambda}_{x} \underset{\neq}{=} S^{\rho} u$

$$S^{\lambda+m} \underset{\neq}{=} S^{\rho+m} u$$

Άσκηση

Να γράψετε έναν τύπο (λίγο περίπλοκο) σε αυτή την γλώσσα και να βρείτε ισοδύναμο χωρίς ποσοδείκτες

19/4/13

Λύση της Άσκησης

$\exists x \, (y = x)$

$\phi, \; \sigma$

$\mathfrak{N}_S = \langle N, 0, S \rangle$

$\mathfrak{N}_S \models \phi \leftrightarrow \sigma$

$\mathfrak{N}_S \models \exists x \, (y = x) \leftrightarrow \sigma$

$S^m x = t$

$S^k x = u$

$\downarrow S^{km} x = S^m u$

$S^k t = S^m u$

$\forall x \exists y \exists z \, ((x = Sz) \wedge (z = Sy)) \vee (x = 0) \vee (Sx = S^2 0)$

$\forall x \exists y \, (\exists z ((x = Sz) \wedge (z = Sy))) \vee (\exists z (x = 0)) \vee (\exists z (\ldots$

$\forall x \exists y \, ((0 = 0) \wedge (x = SSy)) \vee (x = 0) \vee (Sx = S^2 0)$

$\forall x \, ((0 = 0) \wedge (x \neq 0) \wedge (x \neq S0)) \vee (x = 0) \vee (Sx = S^2 0)$

$\neg \exists x \, ((x = 0) \vee (x = S0) \ldots \quad) \wedge (x \neq 0) \wedge (Sx \neq S^2 0)$

$\neg \exists x \, ((x = 0 \wedge x \neq 0 \wedge Sx \neq S^2 0) \vee (x = S0 \wedge x \neq 0 \wedge Sx \neq S^2 0))$

$\neg (0 = 0 \wedge 0 \neq 0 \wedge S0 \neq S^2 0) \vee (0 = 0 \wedge S0 \neq 0 \wedge SS0 \neq S^2 0)$

$0, S, +, \cdot, <, E$

$\mathfrak{N} = \langle N, \ldots \rangle$

$Th\mathfrak{N}$ δεν είναι αξιωματικοποιήσιμη <u>ΔΕΝ</u> είναι διαγνώσιμη

Για οποιοδήποτε (εύλογο) σύνολο αξιωμάτων $A \subseteq Th\mathfrak{N}$, υπάρχει απόφανση σ που είναι αληθής στο $\mathfrak{N}$, $A \not\vdash \sigma$

Προεπισκόπηση

$R \subseteq N^k$

R καλείται ορίσιμη στην $\mathfrak{N}$ αν υπάρχει τύπος $\phi(v_1, \ldots, v_n)$

$(a_1, \dots, a_k) \in R$ ανν $\mathfrak{N} \models \phi(a_1, \dots, a_k)$
$S^{a_1} \dots S^{a_k}$

Αριθμητικοποίηση Gödel

h: Σύμβολα της γλώσσας $\xrightarrow{1:1} \mathbb{N}$

h: ακολουθίες συμβόλων

Αν n φυσικός, μπορούμε με αποτελεσματικό τρόπο να αποφανθούμε αν υπάρχει έκφραση e τέτοια ώστε $h(e) = n$ και το είδος της e.

σύνολο εκφράσεων
$L \subseteq \Sigma^*$

Σ αλφάβητο της γλώσσας $\mathfrak{N}$

L είναι διαγνώσιμο αν $h[L] \subseteq \mathbb{N}$ είναι διαγνώσιμο

Οι διαγνώσιμες σχέσεις στο $\mathbb{N}$ είναι ορίσιμες στο $\mathfrak{N}$

Θεώρημα 30Α

$A \subseteq Th\mathfrak{N}$ «σωστό»

$\{h(\sigma) : \sigma \in A\}$ είναι ορίσιμο στην $\mathfrak{N}$

Τότε υπάρχει σ

$A \nvdash \sigma$ & $\mathfrak{N} \models \sigma$

Διαισθητικά

σ "λέει" δεν αποδεικνύομαι από το A

$(a,b,c) \in R$ a αριθμός G κάποιου τύπου
& c αριθμός G κάποιας απόδειξης σε A
του $\underset{\text{τύπος}}{\alpha}(\underset{\text{θέση } b}{S^b} 0)$

(οι ελεύθερες μεταβλητές του a είναι αριθμός).

Έστω $\rho(v_1, v_2, v_3)$ τύπος με 3 μεταβλητές
$(a,b,c) \in R$ αν $\mathfrak{N} \models \rho(S^a, S^b, S^c)$
$\forall v_3 \neg \rho(v_1, v_2, v_3) \to q$ αριθμός G.

$(a,b,c) \in R$ ανν $\mathfrak{N} \models \rho(S^a, S^b, S^c)$
$(a,b,c) \in R$ αν c απόδειξη σε A του $a(S^b 0)$
$\forall v_3 \neg \rho(v_1, v_2 v_3)$, q αρ. G
σ $\forall v_3 \neg \rho(S^q 0, S^q 0, v_3)$ δεν αποδεικνύεται

$A \nvdash \sigma$. Έστω ότι $\boxed{A \vdash \sigma}$ και έστω κ ο
αριθμός Godel της απόδειξης
$\sigma \vdash \neg \rho(S^q 0, S^q 0, S^k 0)$
$\mathfrak{N} \models \rho(S^q 0, S^q 0, S^k 0)$
$\sigma \notin Th\mathfrak{N}$. Άρα $\boxed{A \nvdash \sigma}$ Άτοπο.

Πρέπει να αποδείξω ότι
$\mathfrak{N} \models \sigma$
$\mathfrak{N} \models \forall v_3 \neg \rho(S^q 0, S^q 0, v_3)$
αληθές (αφού $\not\exists$ απόδειξη $A \vdash \sigma$)

Το σύνολο των αληθών αποφάνσεων στην $\mathfrak{N}$
ΔΕΝ είναι ορίσιμο

Προφανώς αλλιώς πάρε $A = Th\mathfrak{N}$

Διαγωνιοποιητική Προσέγγιση

Έστω $[0,1) = \{r_1, r_2, \ldots\}$

$r_1 = 0, r_{11} r_{12} r_{13} \ldots$

$r_2 = 0, r_{21} r_{22} r_{23} \ldots$

$r_3 = 0, r_{31} r_{32} r_{33} \ldots$

$\vdots$

$0, a_1 a_2 a_3 \quad \notin [0,1) \quad a_i \neq r_{ii}$

$a_i \neq 9$

$(a,b) \in P$ ανν a αριθμ Gödel
τύπου $\alpha(v_i)$ τέτοιος ώστε $\vDash \alpha(S^b 0)$

$\{P_a, a \in \mathbb{N}\}$ όλα τα ορίσιμα υποσύνολα των φυσικών αριθμ.

$P_a = \{b \in \mathbb{N} : (a,b) \in P\}$

$H(b,b)$ δεν είναι ορίσιμο στην $\mathfrak{N}$

$H(b)$ ανν $\neg P(b,b)$

$H(b)$ αν όχι (ο b είναι αριθμός Gödel ενός τύπου $\alpha(v_1)$ & $\mathfrak{N} \models \alpha(S^b 0)$)

Θεώρημα

$\{ H(\tau) \mid \mathfrak{N} \models \tau \}$ δεν είναι ορίσιμη

αριθμ. Gödel.