$\mathcal{L}$ πρωτοτάξια γλώσσα

$\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ δομές

$$h : |\mathfrak{a}| \to |\mathfrak{b}|$$

s απονομή τιμών στην $\mathfrak{a}$

t όρος

$$\left.\begin{array}{l} t^{\mathfrak{a}}[s] \\ \bar{s}(t) \end{array}\right\} s(t)$$

s απονομή στην $\mathfrak{A}$.

h (ομο)μορφισμός

$h \circ s$ απονομή στη δομή $\mathfrak{B}$

$$h \circ s(v) = h(s(v)).$$

Πρόταση

$$h\left(t^{\mathfrak{A}}[s]\right) = t^{\mathfrak{B}}[h \circ s]$$

$$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$$

$$h(s(t)) = h \circ s(t)$$

Απόδειξη Πρότασης

Επαγωγικά.

$$t = f\, t_1 t_2$$

$$h(t^a[s]) = h\left(f^a\left(t_1^a[s], t_2^a[s]\right)\right)$$

$$= f^b\left(h(t_1^a[s]), h(t_2^a[s])\right)$$

$$\vdots$$

$$\checkmark$$

Πρόταση

Αν φ ατομικός τύπος

$$\mathfrak{a} \models \varphi[s] \iff \mathfrak{b} \models \varphi[h \circ s].$$

εφ' όσον h 1-1.

$$x = y \iff h(x) = h(y)$$

1-1

Άσκηση. Να δοθούν

$$L,\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ h,\ \phi,\ s$$

μορ. Α.Τ. αποτ.

$$\mathfrak{A} \not\models \phi[s] \quad \text{αλλά} \quad \mathfrak{B} \models \phi[h \circ s]$$

$$L = \{=\}$$

$$\mathfrak{A} = \langle \{1, 2\} \rangle$$

$$\mathfrak{B} = \langle \{1\} \rangle$$

$h:\{1,2\}\to\{1\}$ $\quad h(1)=h(2)=1.$

$s(v_1)=1$ $\quad h\circ s(v_1)=1$

$s(v_2)=2$ $\quad h\circ s(v_2)=1$

$= v_1 v_2 \quad \phi$

$\mathfrak{A}\models\phi[s]$: ΟΧΙ

$\mathfrak{B}\models\phi[h\circ s]$: ΝΑΙ

ϕ κετ

$$\mathfrak{A} \models \phi[s] \iff \mathfrak{B} \models \phi[h \circ s]$$

εφ' όσον h 1-1 & επί.

$$\exists v_1 \exists v_2 (\neg(= v_1 v_2))$$

ΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ·

$\mathfrak{A}$

R n-θέσια σχέση στη δομή $\mathfrak{A}$

$R \subseteq |\mathfrak{A}|^n$

R καλείται ορίσιμη

ανν

υπάρχει τύπος με ελ. μετ. μεταξύ των $v_1, .., v_n$

$$R(a_1, .., a_n) \text{ ανν}$$

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, .., a_n]$$

$<, +, \cdot, S, 0$

$\mathfrak{N}$

$R(x)$ ανν x ζυγός

$\varphi(v_1) \qquad \exists v_2 \left(v_1 = SS(0) * v_1 \right)$

$R(x)$ ανν x πρώτος

$$R = \begin{cases} \{0\} & \text{αν ισχύει ΑΕ της Αρ.} \\ \{1\} & \text{αν δεν ΑΕ της Αρ.} \end{cases}$$

R ορίσιμο.

Πώς αποδεικνύουμε τη μή ορισιμότητα;

Εργαλείο Α. Μέσω <u>αυτομορφισμών</u>

η μορφ 1-1 επί, $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

Δομή $\mathcal{A}$, h αυτόμορφ, R σχέση που ΔΕΝ διατηρείται από την h

$R(x)$ αλλά $\neg R(h(x))$

ή

$R(h(x))$ αλλά $\neg R(x)$

R ΔΕΝ είναι ορίσιμη.

Παράδειγμα

$\mathbb{R}, <$

$h(x) = x^3$

Η σχέση της «ρητότητας» δεν διατηρείται για τον h.

Γνωστό $\sqrt[3]{2}$ ΔΕΝ είναι ρητός.

$$\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}.$$

$$h(\sqrt[3]{2}) \in \mathbb{Q}$$

$$\neg \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \in \text{viw } \mathbb{Q}(h(\sqrt[3]{2}))$$

ϕ

$Q(x)$ avr $\mathcal{R} \models \phi[\![x]\!]$

$\mathcal{R} \models \phi[\![x]\!] \iff \mathcal{R} \models \phi[\![h(x)]\!]$

$Q(x) \iff Q(h(x))$

Ορισιμότητα Συνόλου απο Δομές.

K σύνολο δομών

• K καλείται <u>στοιχειωδώς</u> ορίσιμο (στην πρωτ. λογική) EC (elementary class).

Αν υπάρχει σ πρόταση:

$a \in K$ αν $a \models \sigma$.

$L =$

Δομές απλώς σύνολα

Θεωρώ παρακάτω δομές που είναι υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

$K = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ είναι στοιχειωδώς ορίσιμη.

Κλάση K δομών που αποτελούν σύνολο με το πολύ 3 στοιχεία.

$$\exists x \exists y \exists z \forall t (t = x \vee t = y \vee t = z)$$

Κλάση δομών που αποτελούνται από όλα τα ΠΕΠ-σύνολα ΔΕΝ είναι στοιχ.-ορίσιμη