4-4-2013

$K(x) = 1$, x μεταβλητή

$K(c) = 1$, c σταθερά

$K(f) = 1 - n$, f n-θέσιο συμβ. συνάρτησης

$$K(s_1 \dots s_n) = K(s_1) + K(s_2) + \dots + K(s_n)$$

1) Αν t όρος τότε $K(t)=1$.

2) Είναι δυνατόν $K(\alpha)=1$ χωρίς να είναι το α όρος π.χ. $\lambda x f$

2) Αν t όρος & α γνήσιο απόκομμα του t, τότε $K(\alpha)<1$ & α δεν είναι όρος.

Αλγόριθμος ελέγχου αν δεδομένη έκφραση
t είναι όρος.

1) Ελέγχουμε αν t είναι μεταβ ή σταθ.
2) Έστω $t = f \ldots$ με f n-θέσιο.
Εντοπίζουμε το μικρότερο s, έτσι ώστε
$t = fs\ldots$ & $K(s) = 1$. Ελέγχουμε αναδρ
αν s όρος. Επαναλαμβάνουμε για άλλες
$n-1$ φορές μετά το s.

Άσκηση.

Έστω t έκφραση έτσι ώστε

(Α) $K(t) = 1$.

(Β) $\forall$ γνήσιο αρχικό τμήμα α του t, $K(\alpha) < 1$

Να αποδειχθεί ότι t όρος.

Λύση. Αν το t είναι ένα μόνο σύμβολο, τότε είναι όρος

Αν το t αποτελείται από περισσότερα του ενός σύμβολα, τότε το πρώτο σύμβολό του

Είναι συναρτησ. σύμβολο, δ. ότι αλλιώς θα παραβιαζόταν η (Β)

Έστω ότι $t = f \ldots$, f n-θέσιο

Θα υπάρχουν $u_1, \ldots, u_n$ με $K(u_1) = 1, \ldots, K(u_n) = 1$ & $t = f u_1 \cdots u_n$ & για κάθε i & για κάθε γνήσιο αρχικό τμήμα α του u_i, $K(\alpha) < 1$.

Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι u_i είναι όροι. Άρα t όρος.

Νέος αλγόριθμος ελέγχου αν t

όρος.

1) Αν t ένα μόνο σύμβολο ✓.

2) Αν t περισσότερα σύμβολα, ελέγχουμε αν

(A) $K(t) = 1$ &

(β) $\forall$ γνήσιο αρχικό τμήμα α του t

$K(\alpha) < 1$

Ο αλγόριθμος δεν δίνει συντακτική ανάλυση.

Αντίστοιχα αποτελέσματα για ΚΣΤ.

Θεωρία Μοντέλων (Συνέχεια).

Σ σύνολο από αποφάνσεις σε μία αριθμήσιμη γλώσσα

Αν Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε έχει αριθμήσιμο μοντέλο.

Θ. Löwenheim-Skolem.

Από το Θ. Αξιοπιστίας Σ συνεπές.

Άρα από την απόδειξη του Θ. Πληρότητας

Σ έχει αριθμήσιμο μοντέλο

(Φαινομενικό) παράδοξο του Skolem.

Θεωρούμε τη γλώσσα της Θ. Συνόλων

$\in$ διμελές

$\emptyset$ σταθερά

Αξιώματα Θεωρίας Συνόλων αποτελούν σύνολο Σ αποφάνσεων.

Δεχόμαστε ότι Σ είναι ικανοποιήσιμο.

Άρα υπάρχει $\mathfrak{A} = \langle A, \in^{\mathfrak{A}}, \phi^{\mathfrak{A}} \rangle$ με

A αριθμήσιμο & $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Υπάρχει απόφανση σ που εκφράζει

ότι υπάρχουν μη αριθμήσιμα στο πλήθος

σύνολα.

$$(\forall f)\big(f \text{ συνάρτηση } \& \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{N} \;\&\; f \neq \phi \longrightarrow (\exists x)(x \notin \operatorname{range} f)\big).$$

Αλλά $\mathfrak{A} \models 6$.

Όμως A αριθμήσιμο.

<u>Φαινομενικό</u> Παράδοξο

Είναι φαινομενικό διότι η αριθμησιμότητα του A δεν εκφράζεται στην $\mathfrak{A}$

Βασικά πράγματα για άπειρους πληθαρίθμους.

Πεπερασμένοι πληθάριθμοι: Φυσικοί Αριθμοί.

$\aleph_0$: πληθάριθμος του $\mathbb{N}$.

$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$

c = πληθάριθμος του $\mathbb{R}$. $2^{\aleph_0}$

$c > \aleph_0$

Υπόθεση συνεχούς $2^{\aleph_0} \overset{?}{=} c = \aleph_1$.

Αν κ και λ άπειροι πληθάριθμοι

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda).$$

Πόρισμα. Αν κ άπειρος

$$\kappa \cdot \aleph_0 = \kappa + \aleph_0 = \kappa.$$

· Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα πληθαρίθμου (άπειρου) κ. (Τότε ένα οποιοδήποτε σύνολο Σ από αποφάνσεις έχει πληθάριθμο κ)

Θεώρημα Löwenheim-Skolem

Αν Σ ικανοποιήσιμο, τότε Σ έχει μοντέλο πληθαρίθμου $\lambda \leq \kappa$.

Θεώρημα LST (Löwenheim, Skolem & Tarski).

Έστω πρωτοτάξια γλώσσα πληθαρίθμου (άπειρου) κ & Σ σύνολο αποφάνσεων.

Αν Σ έχει άπειρο μοντέλο, τότε έχει μοντέλο πληθαρίθμου λ για $\lambda \geq \kappa$.

Θεωρίες

Σ σύνολο αποφάνσεων.

Σ καλείται <u>θεωρία</u> αν $\forall \sigma \left(\Sigma \models \sigma \right.$ έχουμε ότι $\left. \sigma \in \Sigma \right)$

Σ καλείται <u>πλήρης</u> θεωρία αν για κάθε απόφανση σ, $\sigma \in \Sigma$ ή $\neg\sigma \in \Sigma$.

Μερικά Αποτελέσματα για Θεωρίες

Σ σύνολο αποφάνσεων

$\mathcal{K}$ κλάση από μοντέλα.

$$\mathrm{Mod}\,\Sigma = \{\mathfrak{A} : \forall \sigma \in \Sigma \ \mathfrak{A} \models \sigma\}.$$

$$\mathrm{Th}\,\mathcal{K} = \{\sigma : \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} \ \mathfrak{A} \models \sigma\}$$

$\mathrm{Th}\,\mathrm{Mod}\,\Sigma = \mathrm{Cn}\,\Sigma$ συνεπαγόμενα του Σ.

Ασκήσεις.

1) $\Sigma \subseteq Cn\Sigma$

Έστω $\sigma \in \Sigma$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\sigma \in Cn\Sigma = \overline{Th}\, Mod\Sigma$.

Έστω $\mathfrak{A} \in Mod\Sigma$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathfrak{A} \models \sigma$ Προφανώς ισχύει.

$Cn\,\Sigma$

1) $\overline{\Sigma} = Th\,Mod\,\Sigma$ ανν

$\overline{\Sigma}$ θεωρία.

2a) Έστω ότι $\overline{\Sigma} = Th\,Mod\,\Sigma$

Πρέπει να δείξω ότι $\overline{\Sigma}$ θεωρία.

Θεωρώ σ τέτοια ώστε $\overline{\Sigma} \models \sigma$.

Πρέπει να δείξω ότι $\sigma \in \overline{\Sigma}$.

Αρκεί να δείξω ότι

$\sigma \in Th Mod \Sigma$.

Αρκεί να δείξω ότι $\forall \mathfrak{A} \in Mod \Sigma$

$\mathfrak{A} \models \sigma$. Προφανές διότι $\Sigma \models \sigma$

2β) Αν Σ θεωρία τότε

$\Sigma = Th Mod \Sigma$.

Αρκεί να δείξω

$$Th\,Mod\,\Sigma \subseteq \Sigma.$$

Έστω $\sigma \in Th\,Mod\,\Sigma$.

Τότε $\Sigma \models \sigma$. Επειδή Σ υποθέτω ότι είναι θεωρία, $\sigma \in \Sigma$. ΟΕΔ.

Αν K σύνολο μου λέξεων

$\mathrm{Mod}\,\mathrm{Th}\,K$

Ορισμός $\mathcal{K}$ καλείται κλειστό ως προς τη στοιχειώδη ισοδυναμία αν οποιαδήποτε δομή $\mathcal{B}$ που είναι στοιχειωδώς ισοδύναμη με στοιχείο του $\mathcal{K}$ ανήκει στο $\mathcal{K}$.

Υπενθύμιση.

$\mathfrak{a}$ & $\mathfrak{b}$ στοιχειωδώς ισοδύναμες αν

$$\mathrm{Th}\,\mathfrak{a} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \quad (\text{συμβολισμός})$$

1) $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}\,\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$.

2) $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$ αν $\mathcal{K}$ κλειστό ως προς τη στοιχειώδη ισοδυναμία