28-3-2013 Β μέρος.

Θεώρημα Πληρότητας.

$\Sigma \models \varphi$ τότε $\Sigma \vdash \varphi$

Αρκεί να αποδείξουμε.

Αν Σ συνεπές τότε είναι ικανοποιήσιμο.

Δύο βασικές ιδέες.

Α. Απόδ. Θ. Συμπάγειας στην Αποφ. Λογική.

Β. $\neg \forall x \phi$ να έχουν μάρτυρα (Henkin witness) στην υπό κατασκευή δομή.

Προσωρινή Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα του Σ

είναι αριθμήσιμη.

$c_1, c_2, \ldots$ ΝΕΕΣ σταθερές.

Παρατηρούμε ότι το Σ παραμένει

συνεπές.

Θ Θεωρούμε μια αρίθμηση

$(\phi_1, x_1), (\phi_2, x_2) \ldots$

τύπων & μεταβλητών.

Στο Σ προσθέτω διαδοχικά τα

$\neg \forall x_1 \phi_1 \rightarrow \neg \phi_1{}^{x_1}_{c_1}$ σταθερά

c_1 η πρώτη ΝΕΑ

που δεν εμφανίζεται στον ϕ_1.

c_2 η επόμενη σταθερή
που δεν ανήκει στη
$$\neg \forall x_2 \phi_1 \to \phi_1{}^{x_1}_{c_2}$$ & ούτε στη ϕ_2.

κ.ο.κ. (προσθέτω $\neg \forall x_2 \phi_2 \to \phi_2{}^{x_2}_{c_2}$).

Έστω Σ' το σύνολο που προκύπτει.

Ισχυρισμός Σ' συνεπές.

$\Theta_i : \neg \forall x \phi_i \to \neg \phi_i {}^{x_i}_{c_i}$

Ας υποθέσουμε ότι m είναι ο πρώτος θετικός ακέραιος για τον οποίο

$$\Sigma \cup \{\Theta_1, .., \Theta_m\} \text{ ασυνεπές.}$$

Μεταθέτοντας από την αρχή:

$$\Sigma \cup \{\Theta_1, .., \Theta_{m-1}\} \vdash \neg \Theta_m.$$

$\neg\Theta_m$

$$\neg\left(\forall x_m \phi_m \to \neg \phi_m{}^{x_m}_{c_m}\right),$$

Άρα

$$\Sigma \cup \{\Theta_1, \dots, \Theta_{m-1}\} \vdash \neg\forall x_m \phi_m$$

$$\Sigma \cup \{\Theta_1, \dots, \Theta_{m-1}\} \vdash \phi_m{}^{x_m}_{c_m}$$

$$\Downarrow$$

$\Sigma \cup \{\Theta_1, \dots, \Theta_{m-1}\}$ ασυνεπές.

$\Sigma \cup \{\Theta_1, \dots\}$ συνεπές.

Βρίσκουμε (όπως στο Θ. Συμπ. Αποφαντικής Λογικής) ένα

$\Delta \supseteq \Sigma \cup \{\Theta_1, \dots\}$

έτσι ώστε Δ συνεπές & για κάθε τύπο ϕ, $\phi \in \Delta$ ή $\neg\phi \in \Delta$.

Στοχεύουμε να αποδείξουμε

ότι Σ ικανοποιήσιμο.

Πρέπει να βρούμε δομή

$\mathcal{Q} = \langle A,$ ερμηνείες συμβόλων $\rangle$.

$A = \left\{ t \mid t \text{ όρος της γλώσσας (κλειστός)} \right\}$.

Έστω f συναρτησιακό
σύμβολο της γλώσσας

$$f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f t_1 \ldots t_n$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{A}$$

$$c^{\mathcal{A}} = c$$

$R^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n)$ ανν $R t_1 \ldots t_n$

$$\uparrow$$

$$\Delta$$

Πρόβλημα με
ισότητα.

Ερμηνεία συμβόλου = είναι πάντα
ισότητα.

Ενδέχεται να υπάρχουν δύο
δια. συμβ. σταθερών c, c' έτσι
ώστε $c = c' \in \Delta$.

Αγνοούμε προς στιγμήν το πρόβλημα με την ισότητα.

Για ένα ~~τύπο~~ πρόταση φ

$$\varphi \in \Delta \text{ αν } \mathfrak{A} \models \varphi.$$

Το πρόβλημα της ισότητας αντιμετωπίζεται εισάγοντας σχέση ισοδυναμίας στο $\mathfrak{A}$.

$\Sigma \vdash \varphi$ ανν $\Sigma \models \varphi$.

Θεώρημα Συμπάγειας.

Σ ικανοποιήσιμο ανν κάθε πεπ. υποσύνολο του Σ ικανοποιήσιμο.

Β' μορφή Θ. Αξ. Πληρ.

Σ ικανο. ανν Σ συνεπές.

Αποδ. Θ. Συμπαγίας.

Σ ικαν. ανν

Σ συνεπές (Β' μορφή Αξ. Πληρ)

(Καθε πεπ. υπ του Σ συνεπές

Καθε πεπ. υπ του Σ ικαν (Β' μορφή)

Σύνταξη

Πρωτοβάθμιες Γλώσσες.

Δομές - Ερμηνείες

$$\Sigma \models \varphi.$$

Τυπικές αποδείξεις

$$\Sigma \vdash \varphi$$

Α' μορφή

$\Sigma \models \varphi$ ανν $\Sigma \vdash \varphi$

Β' μορφή

Σ συνεπές ανν Σ ικανο.

Θεώρημα Συμπάγειας

Σ ικαν. αν κάθε πεπ. υπ του Σ ικανο

Προσοχή Σ συνεπές αν κάθε πεπ. υποσ. του Σ συνεπές είναι προφανές.

Όλα τα μαθηματικά

(συμπεριλαμβ της Μαθ. Λογικής)

εκφράζονται στην πρωτοτάξια

γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων.