A_E (αξιώματα, πεπερασμένα)

$$A_E \subseteq Th\,\mathfrak{N}$$

$$\underbrace{Cn A_E}_{\text{υπό μελέτη}} \overset{\neq}{\subseteq} Th\,\mathfrak{N}$$

$$A_E \vdash t = S^k 0$$

Θεώρημα

Αν τ απόφανση χωρίς ποσοδείκτες $\in Th(\mathbb{Z})$ τότε $A_E \vdash \tau$.

Απόδειξη

Επαγωγή στο τ. (μερικές περιπτώσεις)

1) $t_1 = t_2$. Από το προηγούμενο $\exists n_1, n_2$

$A_E \vdash t_1 = S^{n_1} 0$ & $A_E \vdash t_2 = S^{n_2} 0$.

Λόγω της αλήθειας των

$t_1 = S^{n_1}0$, $t_2 = S^{n_2}0$, $t_1 = t_2$

συμπεραίνω ότι $n_1 = n_2$. Άρα

$A_E \vdash t_1 = t_2$.

2) $t_1 \neq t_2$. Δείξω ότι $t_1 \neq t_2 \in Th(\mathfrak{N})$.

Ξέρω ότι $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ $A_E \vdash t_1 = S^{n_1}0$

$A_E \vdash t_2 = S^{n_2}0$. Επειδή $t_1 = S^{n_1}0$, $t_2 = S^{n_2}0$

$\vdash \ t_1 \not\leq t_2 \in \mathrm{Th}(\mathcal{T}\mathcal{G})$

συμπεραίνουμε ότι $n_2 \leq n_1$.

Θέλω να δείξω $AE \vdash t_1 \not\leq t_2$

Αρκεί να δείξω $AE, t_1 < t_2$ ασυνεπής.

Αρκεί να δείξω ότι για $n_2 \leq n_1$

τότε $AE, S^{n_1} < S^{n_2}$ είναι ασυνεπής.

Με βάση τα αξιώματα.

Π.χ. Πώς αποδεικνύω ότι $AE, S0 < 0$ ασυνεπής

Πόρισμα

Οποιαδήποτε απόφανση αληθής $(\in Th\,\mathcal{N})$ της μορφής $\exists v_1 \ldots \exists v_n\, \sigma(v_1, \ldots, v_n)$, όπου σ χωρίς ποσοδείκτες είναι αποδείξιμη $\left(A_E \vdash \exists v_1 \ldots \exists v_n\, \sigma \right)$.

Απόδειξη: $\exists\, k_1, \ldots, k_n$ έτσι ώστε $\sigma(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0) \in Th\,\mathcal{N}$

Από το προηγούμενο

$$A_E \vdash \sigma(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0).$$

Άρα $A_E \vdash \exists v_1 \ldots \exists v_n \, \tau(v_1, \ldots, v_n)$

Δεν ισχύει το αντίστοιχο για καθολικούς ποσοδείκτες

Άσκηση/Θεωρία.

καλοσχ. τύπων

Ένα σύνολο Σ ΚΣΤ καλείται αριθμητικά πλήρες αν για κάθε $\varphi(v_1, \dots v_n) \in \Sigma$ και για κάθε $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ αν $\varphi(S^{k_1}0, \dots S^{k_n}0)$ αληθής τότε $\varphi(S^{k_1}0, \dots, S^{k_n}0)$ αποδείξιμη

Π.χ. $\Sigma =$ τύποι χωρίς ποσοδείκτες

Ένα σύνολο από ΚΣΤ Σ καλείται αριθμητικά προσδιορισμένο (λέμε ότι προσδιορίζεται αριθμητικά) αν για κάθε $\phi(v_1, \dots, v_n) \in \Sigma$ & $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ έχω ότι

$$A_E \vdash \phi(S^{k_1}0, \dots, S^{k_n}0) \text{ ή } A_E \vdash \neg\phi(S^{k_1}0, \dots, S^{k_n}0)$$

Να αποδειχθεί ότι ένα α. προσδιορισμένο Σ είναι και α. πλήρες.

Απόδειξη. Έστω Σ α. προσδ. Θ.δ.ό. είναι α-πλ. Έστω $\varphi(v_1,\dots,v_n) \in \Sigma$ & $k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}$. Έστω ακόμη $\varphi(S^{k_1}0,\dots,S^{k_n}0) \in Th\mathfrak{N}$.

Από την υπόθεσή μας όπως

$$A_E \vdash \phi(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0) \quad \text{ή}$$

$$A_E \vdash \neg\phi(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0)$$

Έστω ότι $A_E \vdash \neg\phi(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0)$

Τότε $\mathfrak{N} \models \neg\phi(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0)$.

Άτοπο.

Αντίστροφο. Έστω Σ α. πλήρες.

Είναι και' ανάγκη α. προσδ;

ΟΧΙ.

Θεωρώ Σ = υπαρξιακοί τύποι

(μόνο υπαρξιακοί ποσοδείκτες).

Άσκηση. Αν Σ κλειστό ως προς τις αρνήσεις ($\varphi \in \Sigma$ τότε $\neg\varphi \in \Sigma$) τότε ισχύει αντίστροφο.

Αντιπροσώπευση

Να θυμηθούμε ορισμό οριστότητας.

$$R \subseteq \mathbb{N}^k$$

Υπάρχει τύπος $\phi(v_1, \dots, v_k)$ έτσι ώστε

$(a_1, \dots a_k) \in R$ ανν $\mathfrak{N} \models \phi(S^{a_1}0, \dots, S^{a_k}0)$

$\phi[\![a_1, \dots, a_k]\!]$

$R \subseteq \mathbb{N}^k$ καλείται αναπαραστάσιμη στην ΣΠΑΕ αν υπάρχει τύπος $\phi(v_1, \ldots, v_k)$ έτσι ώστε $\forall a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$

Αν $R(a_1, \ldots, a_k)$ τότε $AE \vdash \phi(S^{a_1}0, \ldots, S^{a_k}0)$

Αν $\neg R(a_1, \ldots, a_k)$ τότε $AE \vdash \neg\phi(S^{a_1}0, \ldots, S^{a_k}0)$

Άσκηση

R αντιπροσ. μέσω ϕ ανν

1) ϕ αριθμητικά προσδ.

2) R ορίσιμη. μέσω ϕ.

Απόδειξη. Έστω R αντιπροσωπεύεται μέσω ϕ

$\forall a_1 \ldots a_k$ $(a_1, \ldots a_k) \in R$ τότε $A \in \vdash \phi(a_1, \ldots, a_k)$

$(a_1, \ldots, a_k) \notin R$ τότε $A \in \vdash \neg\phi(a_1, \ldots, a_k)$

Απόδειξη του 2

· Έστω ότι $R(a_1, \dots, a_k)$. Πρέπει ν.δ.ο.

$\mathfrak{A} \models \phi(a_1, \dots, a_k)$ & το αντίστροφο.

OK.

Αντίστροφο: Άσκηση.