21-3-2013.

Deduction: Συναγωγή.

Reduction: Απαγωγή

Μεταθεωρήματα.

Μεταθ. Γενίκευσης.

$\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \Sigma \vdash \forall x \phi$

x δεν είναι ελ. στο Σ.

Μεταθ. Αποφαντικής Λογ.

Αν $\Sigma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ κ ϕ ταυτολογική συνέπεια των $\phi_1, \ldots, \phi_n$ τότε $\Sigma \vdash \phi$.

Μεταθ. Συναγωγής, Α.Α., Απ. σε Ατ., Μ. Άρνησης.

Ασκήσεις.

$\vdash \forall x \phi \leftrightarrow \forall y \phi^x_y$ $\int f(x)dx = \int f(y)dy$. Α y ΔΕΝ εμφανί-ζεται στον ϕ.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι:

Α. $\vdash \forall x \phi \to \forall y \phi^x_y$

Β. $\vdash \forall y \phi^x_y \to \forall x \phi$

Α. Αρκεί (ΜΘ Συν) $\forall x \phi \vdash \forall y \phi^x_y$. Αρκεί (ΜΘ Γ) $\forall x \phi \vdash \phi^x_y$ (πληρούνται οι προϋποθ. ΜΘΓ). Ισχύει με βάση ΛΑ (2;) ισχύουν οι προϋπ.

Β. $\vdash \forall y \phi^x_y \to \forall x \phi$. Αρκεί $\forall y \phi^x_y \vdash \forall x \phi$. Αρκεί $\forall y \phi^x_y \vdash \phi$. Ισχύει ΛΑ 2.

$y = y \to \forall y\ (x = y)$

$y = y \to \forall y\ (y = y)$

$x = x \to \forall x\ (y = y)$

2ο Παράδειγμα

$\vdash \alpha \to \forall x \beta \Leftrightarrow \forall x (\alpha \to \beta)$. Με την υπόθεση x όχι ελ. στο α.

Αρκεί

A. $\vdash (\alpha \to \forall x \beta) \to \forall x (\alpha \to \beta)$

B. $\vdash \forall x (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x \beta)$

A. Αρκεί ΜΘΣ

$\alpha \to \forall x \beta \vdash \forall x (\alpha \to \beta)$

Αρκεί ΜΘ.Γ.

$\alpha \to \forall x \beta \vdash \alpha \to \beta$.

Αρκεί ΜΘ Συν. $\alpha \to \forall x \beta, \alpha \vdash \beta$ . . . . ?

Παράδειγμα 3.

Αν φ τύπος α t όρος τότε υπάρχει τύπος φ' έτσι ώστε $\vdash \phi \Leftrightarrow \phi'$ & x αντικαταστάσιμη από τ ον t στον φ' (x μεταβλητή)

Εξήγηση.

$\forall y (x = y) \to \forall z (x = z)$ $\forall y' (x = y') \to \forall z$ . . .

Η μεταβλητή x ΔΕΝ είναι αντικαταστάσιμη από τον z

$f w z$, $f w y$

$\vdash \forall x (x = x)$

$\vdash \forall x \forall y (x = y \to y = x)$.

Μεταβατικότητα.

Θεώρημα Εγκυρότητας. Πληρότητας.

$\Sigma \vdash \phi$ ανν $\Sigma \models \phi$.

A. Εάν $\Sigma \vdash \phi$ τότε $\Sigma \models \phi$.

1. Όλα τα λογικά αξιώματα είναι έγκυροι τύποι.

Σημείωση. Ο τύπος ϕ καλείται έγκυρος αν για κάθε $\mathfrak{A}$ & για κάθε s

$$\mathfrak{A} \models \phi[s].$$

Θα κάνουμε σχηματική απόδειξη για το λογικό αξίωμα $\forall x \phi \to \phi^x_t$. Θεωρώ ως ϕ Px. Πρέπει να αποδείξω ότι ότι είναι έγκυρος ο τύπος $\forall x Px \to Px^x_t$. Δηλαδή πρέπει να αποδείξω την εγκυρότητα του

$$\forall x Px \to Pt$$

Έστω $\mathfrak{A}$ δομή & s αποτίμηση. Πρέπει να δείξω ότι

$$\mathfrak{A} \models \forall x Px \to Pt\ [s]$$

Δέχομαι ότι $\mathfrak{A} \models \forall x Px\ [s]$ και πρέπει να αποδείξω ότι $\mathfrak{A} \models Pt\ [s]$. Το τελευταίο σημαίνει ότι

$$\bar{t}^{\mathfrak{A}}[s] \in P^{\mathfrak{A}}.$$

Υπόθεση λέει $\mathfrak{A} \models \forall x Px[s]$, δηλαδή $\forall d \in |\mathfrak{A}|\ \mathfrak{A} \models Px[s(x|d)]$. Δηλ. $\forall d \in |\mathfrak{A}|\ d \in P^{\mathfrak{A}}$. Είναι φανερό.