ΛΟΓΙΚΗ Ι — ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Σεπτέμβριος 2014

Θέμα 1 [3,5 μονάδες]. Έστωσαν Σ σύνολο προτάσεων και $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ προτάσεις πρωτοτάξιας γλώσσας έτσι ώστε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο και η

$$(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \rightarrow \phi_0$$

είναι έγκυρη. Να αποδείξετε, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Συμπάγειας (ούτε του Θεωρήματος Εγκυρότητας-Πληρότητας), ότι για κάποιο από τα σύνολα

$$\Sigma \cup \{\phi_0\}, \Sigma \cup \{\neg\phi_1\}, \ldots, \Sigma \cup \{\neg\phi_n\}$$

κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο.

Λύση. Έστω ότι υπάρχουν πεπερασμένα μη ικανοποιήσιμα $S_0 \subseteq \Sigma \cup \{\phi_0\}$ και $S_i \subseteq \Sigma \cup \{\neg\phi_i\}, i = 1, \ldots, n$. Επειδή η μη ικανοποιησιμότητα διατηρείται για τα υπερσύνολα, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα $T_i \subseteq \Sigma, i = 0, \ldots n$ έτσι ώστε τα $T_0 \cup \{\phi_0\}$ και $T_i \cup \{\neg\phi_i\}, i = 1, \ldots n$, είναι μη ικανοποιήσιμα. Παρατηρούμε ότι $\cup_{i=0}^{n} T_i$ είναι ικανοποιήσιμο ως πεπερασμένο υποσύνολο του Σ. Έστω $\mathfrak{A}$ δομή τέτοια ώστε $\mathfrak{A} \models \tau$ για κάθε $\tau \in \cup_{i=0}^{n} T_i$. Λόγω της εγκυρότητας της $(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \rightarrow \phi_0$, συμπεραίνουμε ότι $\mathfrak{A} \models (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \rightarrow \phi_0$, οπότε είτε $\mathfrak{A} \models \phi_0$ είτε για κάποιο $i = 1, \ldots, n, \mathfrak{A} \models \neg\phi_i$. Συμπεραίνουμε ότι είτε η δομή $\mathfrak{A}$ επαληθεύει όλα τα στοιχεία του $T_0 \cup \{\phi_0\}$, είτε για κάποιο $i = 1, \ldots, n$ η $\mathfrak{A}$ επαληθεύει όλα τα στοιχεία του $T_i \cup \{\neg\phi_i\}$. Επομένως κάποιο από τα $T_0 \cup \{\phi_0\}, T_1 \cup \{\neg\phi_1\}, \ldots, T_n \cup \{\neg\phi_n\}$ είναι ικανοποιήσιμο, άτοπο.

Θέμα 2 [3,5 μονάδες]. Έστωσαν R διθέσια σχέση στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ (δηλαδή $R \subseteq \mathbb{N}^2$) και $F = \{c_1, \ldots, c_n\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Έστω επίσης P η μονοθέσια σχέση που ορίζεται ως εξής:

$$a \in P \text{ ανν για κάθε } c \in F, (a, c) \in R.$$

Να αποδείξετε ότι αν η σχέση R είναι αναπαραστάσιμη (αντιπροσωπεύσιμη) στη θεωρία Cn A_E (την υποθεωρία της Th$\mathfrak{N}$ που ορίζεται από το πεπερασμένο αξιωματικό σύστημα A_E που περιγράφει τις βασικές ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης στο σύνολο $\mathbb{N}$), το ίδιο ισχύει και για την P. Η απόδειξή σας να στηρίζεται μόνο στους ορισμούς καν να μην κάνει χρήση της σχέσης αναπαραστάσιμων και διαγνώσιμων σχέσεων.
Υπόδειξη: Θεωρήστε τύπο $\phi(u, v)$ που αναπαριστά την R και με βάση αυτόν ορίστε τύπο που αναπαριστά την P.

Λύση. Σύμφωνα με την υπόδειξη έστω $\phi(u, v)$ τύπος που αναπαριστά την R. Από τον ορισμό, για κάθε δύο φυσικούς a, c τότε έχουμε:

$$\text{Αν } (a,c) \in R \text{ τότε } \phi(S^a0, S^c0) \in \text{Cn } A_E, \text{ και} \tag{1}$$

$$\text{Αν } (a,c) \notin R \text{ τότε } \neg\phi(S^a0, S^c0) \in \text{Cn } A_E. \tag{2}$$

Θεωρούμε τον τύπο $\psi(u)$ που ορίζεται να είναι

$$\phi(u, S^{c_1}(0)) \wedge \cdots \wedge \phi(u, S^{c_n}(0)).$$

Θα αποδείξουμε ότι ο ψ αντιπροσωπεύει την P.

Πράγματι για το ένα σκέλος της απόδειξης θεωρούμε φυσικό $a \in P$. Από τον ορισμό της P , για κάθε φυσικό $c \in F$, $(a,c) \in R$. Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\phi(S^a0, S^c0) \in \text{Cn } A_E$. Επομένως,

$$\phi(S^a0, S^{c_1}(0)) \wedge \cdots \wedge \phi(S^a0, S^{c_n}(0)) \in \text{Cn } A_E,$$

άρα $\psi(S^a0) \in \text{Cn } A_E$.

Για το άλλο σκέλος της απόδειξης θεωρούμε φυσικό a τέτοιο ώστε $a \notin P$. Από τον ορισμό της P έχουμε ότι υπάρχει $i = 1, \ldots, n$, $(a, c_i) \notin R$. Άρα από τη σχέση (2) έχουμε $\neg\phi(S^a0, S^{c_i}0) \in \text{Cn } A_E$, άρα

$$\neg(\phi(S^a0, S^{c_1}(0)) \wedge \cdots \wedge \phi(S^a0, S^{c_n}(0))) \in \text{Cn } A_E,$$

δηλαδή $\neg\psi(S^a0) \in \text{Cn } A_E$.

Θέμα 3 [3,5 μονάδες]. Λέμε ότι ένα σύνολο προτάσεων T στην πρωτοβάθμια γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών ικανοποιεί το Λήμμα Σταθερού Σημείου, αν για κάθε τύπο β με μόνη ελεύθερη μεταβλητή τη v_1, υπάρχει πρόταση σ τέτοια ώστε:

$$T \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(S^{\sharp\sigma}0) \tag{3}$$

Αν T είναι συνεπής θεωρία που ικανοποιεί το Λήμμα Σταθρού Σημείου, να αποδείξετε ότι το σύνολο $\sharp T$ δεν είναι αναπαραστάσιμο στην T.

Λύση. Έστω ότι το $\sharp T$ είναι αναπαραστάσιμο μέσω της ϕ δηλαδή:

$$\text{Αν } \sharp\tau \in \sharp T \text{ τότε } T \vdash \phi(S^{\sharp\tau}0), \text{ και} \tag{4}$$

$$\text{αν } \sharp\tau \notin \sharp T \text{ τότε } T \vdash \neg\phi(S^{\sharp\tau}0). \tag{5}$$

Με βάση την υπόθεση ότι η T ικανοποιεί το Λήμμα Σταθερού Σημείου, έχουμε ότι υπάρχει πρόταση σ τέτοια ώστε:

$$T \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\phi(S^{\sharp\sigma}0). \tag{6}$$

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί δείχνοντας παρακάτω ότι οδηγούμαστε σε άτοπο είτε αν $\sharp\sigma \in \sharp T$ είτε αν $\sharp\sigma \notin \sharp T$.

Έστω ότι $\sharp\sigma \in \sharp T$. Τότε από την (4) έχουμε ότι $T \vdash \phi(S^{\sharp\sigma}0)$, άρα από (6) έχουμε $T \vdash \neg\sigma$. Αλλά η υπόθεση $\sharp\sigma \in \sharp T$ είναι ισοδύναμη με $T \vdash \sigma$, άτοπο, αφού η T συνεπής.

Έστω τώρα ότι $\sharp\sigma \notin \sharp T$. Τότε από την (5) έχουμε ότι $T \vdash \neg\phi(S^{\sharp\sigma}0)$, άρα από (6) έχουμε $T \vdash \sigma$, άρα $\sharp\sigma \in \sharp T$, άτοπο πάλι.