Λογική Ι – Μαθηματική Λογική
Εξέταση Σεπτεμβρίου 2013

Θέμα 1. Έστωσαν Σ σύνολο προτάσεων (αποφάνσεων) και $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ προτάσεις πρωτοτάξιας γλώσσας έτσι ώστε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο και η

$$\phi_0 \to (\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n)$$

είναι έγκυρη. Να αποδείξετε, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Συμπάγειας (ούτε του Θεωρήματος Εγκυρότητας-Πληρότητας), ότι για κάποιο από τα σύνολα

$$\Sigma \cup \{\neg\phi_0\}, \Sigma \cup \{\phi_1\}, \ldots, \Sigma \cup \{\phi_n\}$$

κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο.

Λύση. Έστω ότι υπάρχουν πεπερασμένα μη ικανοποιήσιμα $S_0 \subseteq \Sigma \cup \{\neg\phi_0\}$ και $S_i \subseteq \Sigma \cup \{\phi_i\}, i = 1, \ldots, n$. Επειδή η μη ικανοποιησιμότητα διατηρείται για τα υπερσύνολα, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα $T_i \subseteq \Sigma, i = 0, \ldots n$ έτσι ώστε τα $T_0 \cup \{\neg\phi_0\}$ και $T_i \cup \{\phi_i\}, i = 1, \ldots n$, είναι μη ικανοποιήσιμα. Παρατηρούμε ότι $\cup_{i=0}^{n} T_i$ είναι ικανοποιήσιμο ως πεπερασμένο υποσύνολο του Σ. Έστω $\mathfrak{A}$ δομή τέτοια ώστε $\mathfrak{A} \models \tau$ για κάθε $\tau \in \cup_{i=0}^{n} T_i$. Λόγω της εγκυρότητας της $\phi_0 \to (\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n)$, συμπεραίνουμε ότι $\mathfrak{A} \models \phi_0 \to (\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n)$, οπότε είτε $\mathfrak{A} \models \neg\phi_0$ είτε για κάποιο $i = 1, \ldots, n, \mathfrak{A} \models \phi_i$. Συμπεραίνουμε ότι είτε η δομή $\mathfrak{A}$ επαληθεύει όλα τα στοιχεία του $T_0 \cup \{\neg\phi_0\}$, είτε για κάποιο $i = 1, \ldots, n$ η $\mathfrak{A}$ επαληθεύει όλα τα στοιχεία του $T_i \cup \{\phi_i\}$. Επομένως κάποιο από τα $T_0 \cup \{\neg\phi_0\}, T_1 \cup \{\phi_1\}, \ldots, T_n \cup \{\phi_n\}$ είναι ικανοποιήσιμο, άτοπο.

Θέμα 2. Έστωσαν R διθέσια σχέση στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ (δηλαδή $R \subseteq \mathbb{N}^2$) και $F = \{c_1, \ldots, c_n\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Έστω επίσης P η μονοθέσια σχέση που ορίζεται ως εξής:

$$a \in P \text{ ανν υπάρχει } c \in F \text{ έτσι ώστε } (a, c) \in R.$$

Να αποδείξετε ότι αν η σχέση R είναι αντιπροσωπεύσιμη (αναπαραστάσιμη) στη θεωρία Cn A_E (την υποθεωρία της Th$\mathfrak{N}$ που ορίζεται από το πεπερασμένο αξιωματικό σύστημα A_E που περιγράφει τις βασικές ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης στο σύνολο $\mathbb{N}$), το ίδιο ισχύει και για την P. Η απόδειξή σας να στηρίζεται μόνο στους ορισμούς καν να μην κάνει χρήση της σχέσης αντιπροσωπεύσιμων και διαγνώσιμων σχέσεων.
Υπόδειξη: Θεωρήστε τύπο $\phi(u, v)$ που αντιπροσωπεύει την R και με βάση αυτόν ορίστε τύπο που αντιπροσωπεύει την P.

Λύση. Σύμφωνα με την υπόδειξη έστω $\phi(u, v)$ τύπος που αντιπροσωπεύει την R. Από τον ορισμό, για κάθε δύο φυσικούς a, c τότε έχουμε:

$$\text{Αν } (a, c) \in R \text{ τότε } \phi(S^a 0, S^c 0) \in \text{Cn } A_E, \text{ και} \tag{1}$$

$$\text{Αν } (a, c) \notin R \text{ τότε } \neg\phi(S^a 0, S^c 0) \in \text{Cn } A_E. \tag{2}$$

Θεωρούμε τον τύπο $\psi(u)$ που ορίζεται να είναι

$$\phi(u, S^{c_1}(0)) \vee \cdots \vee \phi(u, S^{c_n}(0)).$$

Θα αποδείξουμε ότι ο ψ αντιπροσωπεύει την P.

Πράγματι για το ένα σκέλος της απόδειξης θεωρούμε φυσικό $a \in P$. Από τον ορισμό της P υπάρχει φυσικός $c \in F$ έτσι ώστε $(a, c) \in R$. Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\phi(S^a 0, S^c 0) \in \text{Cn } A_E$. Επίσης, επειδή $c = c_i$ για κάποιο $i = 1, \ldots, n$, προκύπτει ότι
$$\phi(S^a 0, S^{c_1}(0)) \vee \cdots \vee \phi(S^a 0, S^{c_n}(0)) \in \text{Cn } A_E,$$
άρα $\psi(S^a 0) \in \text{Cn } A_E$.

Για το άλλο σκέλος της απόδειξης θεωρούμε ζεύγος φυσικών (a, b) τέτοιο ώστε $(a.b) \notin P$. Από τον ορισμό της P έχουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$, $(a, c_i) \notin R$. Άρα από τη σχέση (2) έχουμε $\neg\phi(S^a 0, S^{c_i} 0) \in \text{Cn } A_E$, άρα
$$\neg(\phi(S^a 0, S^{c_1}(0)) \vee \cdots \vee \phi(S^a 0, S^{c_n}(0))) \in \text{Cn } A_E,$$
δηλαδή $\neg\psi(S^a 0) \in \text{Cn } A_E$.

Θέμα 3. Αποδείξτε ότι ένα υποσύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ περιέχει μέγιστο στοιχείο (ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$) αν έχει ελάχιστο άνω φράγμα ως υποσύνολο των μη συμβατικών πραγματικών ${}^*\mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε το συμβατικό μέρος ενός ελαχίστου άνω φράγματος $m \in {}^*\mathbb{R}$ του A (προσοχή όμως αυτό μπορεί να είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο με το m —η απόδειξή σας πρέπει να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις). Θα πάρουν μόρια μόνον *απολύτως* ορθοί, ακριβείς, *πλήρως* τεκμηριωμένοι και γραμμένοι με κατανοητό τρόπο συλλογισμοί οι οποίοι κατευθύνονται προς τη λύση.

Λύση. Έστω ότι το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα $m \in {}^*\mathbb{R}$ και έστω $st(m)$ το συμβατικό μέρος και dm το απειροστό μέρος του m (το dm μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή 0). Αν $m \in A$ έχουμε προφανώς τελειώσει. Έστω λοιπόν ότι $\forall x \in A(m > x)$.

Θα δείξουμε τότε πρώτα ότι
$$\forall x \in A(st(m) \geq x). \tag{3}$$
Πράγματι, έστω ότι για κάποιο $x_0 \in A$
$$x_0 > st(m). \tag{4}$$
Τότε επειδή $m = st(m) + dm > x_0$ συμπεραίνουμε ότι
$$dm > x_0 - st(m).$$
Από την (4) όμως $x_0 - st(m) > 0$, άτοπο επειδή $x_0 - st(m)$ είναι θετικός συμβατικός πραγματικός και dm απειροστό.

Συνεχίζουμε έχοντας την (3). Θα αποδείξουμε ότι $st(m) \in A$ οπότε θα έχουμε τελειώσει. Έστω ότι
$$\forall x \in A(st(m) > x). \tag{5}$$
Θεωρούμε τώρα τυχόν *θετικό* απειροστό i τέτοιο ώστε
$$i/2 > -dm. \tag{6}$$
Τότε από την (5) και τον ορισμό του απειροστού έχουμε ότι
$$\forall x \in A(st(m) - x > i > 0). \tag{7}$$

Άρα επειδή $st(m) = m - dm$, έχουμε από την (7) ότι $\forall x \in A(m - dm - x > i)$, άρα χρησιμοποιώντας και την (6) έχουμε ότι $\forall x \in A(m - i/2 > x + dm + i/2 > x)$. Επομένως το $m - i/2$ επίσης άνω φράγμα του A, άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι το m είναι *ελάχιστο* άνω φράγμα.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα ως προς τη βαθμολογία (αλλά όχι τη δυσκολία). Στη διόρθωση θα ληφθεί πολύ σοβαρά υπόψη η ακρίβεια και η οικονομία στη διατύπωση.