

**Εξέταση Σεπτεμβρίου 2024 στο μάθημα:  
Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα**

**ΘΕΜΑ 1** (3 μονάδες)

Έστω  $\{N(t), t \geq 0\}$  ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους  $\{X_n, n \geq 1\}$ , που έχουν συνεχή κατανομή  $F_X(\cdot)$  και ροπές 2ης τάξης πεπερασμένες. Έστω  $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \geq 1$  οι χρονικές στιγμές των γεγονότων και  $S_0 = 0$ . Θέτουμε  $T(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$  και  $h(t) = E(T(t)), t \geq 0$ .

- A. Να προσδιοριστεί η ανανεωτική εξίσωση για την  $h(t)$ .
- B. Να δειχθεί ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται για να μπορεί να εφαρμοστεί το Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (Β.Α.Θ.).
- Γ. Να δειχθεί ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{E(X^2)}{E(X)}$ .

**ΘΕΜΑ 2** (3 μονάδες)

Κατά την παραγωγή ενός καλωδίου δημιουργούνται ατέλειες κατά το μήκος του. Κάποιες είναι ασήμαντες, κάποιες είναι σημαντικές. Οι ασήμαντες ατέλειες ακολουθούν διαδικασία *Poisson* με ρυθμό  $\lambda_1$  ασήμαντων ατελειών ανά μέτρο, ενώ οι σημαντικές ατέλειες, δημιουργούνται ανεξάρτητα από τις ασήμαντες και ακολουθούν διαδικασία *Poisson* με ρυθμό  $\lambda_2$  σημαντικών ατελειών ανά μέτρο. Έστω  $N(t)$  ο αριθμός (συνολικών) ατελειών στα πρώτα  $t$  μέτρα του καλωδίου. Να υπολογιστούν:

- A. Η πιθανότητα να υπάρχει ασήμαντη ατέλεια στα πρώτα 2 μέτρα αν ξέρουμε ότι στα πρώτα 10 μέτρα υπάρχει ακριβώς μία ασήμαντη ατέλεια.
- B. Η πιθανότητα να είναι ασήμαντη η ατέλεια στα πρώτα 10 μέτρα, αν ξέρουμε ότι υπάρχει ακριβώς μια ατέλεια στα πρώτα 10 μέτρα.
- Γ. Η πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς 5 ατέλειες στο πρώτο μέτρο δεδομένου ότι υπάρχουν 12 ατέλειες στα πρώτα 2 μέτρα.
- Δ. Ο αναμενόμενος αριθμός ασήμαντων ατελειών ανάμεσα σε 2 διαδοχικές σημαντικές ατέλειες.

**ΘΕΜΑ 3** (2 μονάδες)

Επιβάτες φτάνουν σε μια πλατφόρμα τρένων σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους  $T_n, n \geq 1$  με μέση τιμή  $\mu$ . Μολις συγκεντρωθούν  $N$  επιβάτες στη πλατφόρμα επιβιβάζονται άμεσα στο πρώτο τρένο που βρίσκουν στη πλατφόρμα και αυτό αναχωρεί αμέσως με τους  $N$  επιβάτες μέσα. Νέο τρένο είναι διαθέσιμο για τους επόμενους επιβάτες που θα καταφτάσουν στη πλατφόρμα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο. Υποθέτουμε ότι η εταιρία τρένων επιβαρύνεται με ένα κόστος  $n \cdot c$  ανά μονάδα χρόνου όταν περιμένουν  $n$  επιβάτες στη πλατφόρμα ( $c$  σταθερά) και ένα σταθερό κόστος  $K$  κάθε φορά που αναχωρεί τρένο. Έστω  $C(t)$  το συνολικό κόστος για την εταιρία μέχρι το χρόνο  $t$ .

- A. Να δειχθεί ότι η  $\{C(t), t \geq 0\}$  είναι ανανεωτική διαδικασία κόστους.
- B. Να δειχθεί ότι ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους δίνεται από τον τύπο  $\frac{c(N-1)}{2} + \frac{K}{N\mu}$ .
- Γ. Να προσδιοριστεί ο βέλτιστος αριθμός  $N$  για την ελαχιστοποίηση του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους.

#### ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες)

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης, με 2 εξυπηρετές, σε κατάσταση ισορροπίας. Έστω  $p_n$  η πιθανότητα να υπάρχουν  $n$  πελάτες στο σύστημα όπου  $p_0 = 1/16$ ,  $p_1 = 4/16$ ,  $p_2 = 6/16$ ,  $p_3 = 4/16$ ,  $p_4 = 1/16$  και  $p_n = 0$ ,  $n \geq 5$ . Να υπολογιστούν:

- A. Ο αναμενόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα καθώς και ο αναμενόμενος αριθμός πελατών στην ουρά.
- B. Ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο σύστημα καθώς και ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην ουρά εάν ο μέσος ρυθμός άφιξης είναι 2 πελάτες την ώρα.

#### ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Απαντήστε σε όλα τα θέματα.
- Δικαιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας. Η εργασία επίλυσης πρέπει να φαίνεται.
- Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας και στα θέματα. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση κινητού τηλεφώνου.
- Διάρκεια διαγωνίσματος 2 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά.

**Καλή Επιτυχία !!**