Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι
Τελική εξέταση 12ης Σεπτεμβρίου 2012 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Θέμα 1ο: (3 βαθμοί) Στη διάρκεια μιας εφημερίας ενός νοσοκομείου τα χειρουργικά περιστατικά καταφθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 20 περιστατικά την ώρα. Κάθε περιστατικό χρειάζεται ακτινογραφία με πιθανότητα 0.75, ανεξάρτητα από τα άλλα περιστατικά. Να υπολογιστούν:

(1) Η πιθανότητα να χρειαστεί πρώτη φορά ακτινογραφία στο τέταρτο περιστατικό που καταφθάνει στην εφημερία.

(2) Η δεσμευμένη πιθανότητα στην πρώτη μισή ώρα της εφημερίας να χρειάστηκαν ακτινογραφία 5 περιστατικά, δεδομένου ότι στην πρώτη ώρα της εφημερίας εμφανίστηκαν συνολικά 15 περιστατικά.

(3) Ο δεσμευμένος μέσος χρόνος εμφάνισης του πρώτου περιστατικού στην εφημερία δεδομένου ότι μέσα στα πρώτα 15 λεπτά της εφημερίας εμφανίστηκαν 2 περιστατικά.

Θέμα 2ο: (3 βαθμοί) Μια μηχανή επιθεωρείται στους χρόνους $S_1, S_2, \ldots$ των γεγονότων μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων (σε λεπτά) $G(t)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g(t) = \frac{4}{25}e^{-\frac{t}{5}} + \frac{1}{50}e^{-\frac{t}{10}},\ t \geq 0.$$

Κάθε επιθεώρηση κοστίζει 5 ευρώ. Κατά τη διάρκεια της λειτουργίας της η μηχανή καταναλώνει ρεύμα με κόστος 0.05 ευρώ το λεπτό. Επιπλέον υφίσταται ηλεκτρικές διαταραχές σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 60 ηλεκτρικές διαταραχές την ώρα. Κάθε ηλεκτρική διαταραχή επιφέρει κόστος 0.25 ευρώ.

(1) Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος της λειτουργίας της μηχανής ανά λεπτό (λάβετε υπόψη το κόστος των επιθεωρήσεων, του ρεύματος και των ηλεκτρικών διαταραχών).

(2) Να υπολογιστεί η ανανεωτική συνάρτηση $M(t) = E[N(t)]$.

Θέμα 3ο: (4 βαθμοί) Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή $G(x)$ και $E[X_1^k] = \mu_k < \infty$, $k \geq 1$. Έστω $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 1, 2, \ldots$ ($S_0 = 0$) η αντίστοιχη ανανεωτική ακολουθία, $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, $t \geq 0$ η ανανεωτική διαδικασία και $M(t) = E[N(t)]$, $t \geq 0$ η ανανεωτική συνάρτηση.

(1) Έστω $R(t) = E[N(t)^2]$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $R(t)$ και να δειχθεί ότι

$$R(t) = M(t) + 2\int_0^t M(t-x)dM(x).$$

(2) Έστω $A(t) = t - S_{N(t)}$ ο παρελθών ή αναδρομικός χρόνος ανανέωσης (ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας) τη στιγμή t και $C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ είναι ο t-εξαρτώμενος χρόνος (δηλαδή $C(t)$ είναι ο ενδιάμεσος χρόνος ανανέωσης που περιέχει τη στιγμή t ή ισοδύναμα ο χρόνος από το προηγούμενο γεγονός έως το επόμενο γεγονός τη στιγμή t). Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t A(u)C(u)du\right]}{t}$$

(το όριο να δοθεί ως έκφραση κάποιων ροπών από τις $\mu_1, \mu_2, \ldots$).

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Τελική εξέταση 12ης Σεπτεμβρίου 2012

Λύσεις:

Θέμα 1ο:

(1) Έχουμε:

P(1η φορά ακτινογραφία στο 4ο περιστατικό)

= P(1ο περιστατικό όχι ακτιν., 2ο περιστατικό όχι ακτιν., 3ο περιστατικό όχι ακτιν., 4ο περιστατικό ακτιν)

Ανεξ. → = P (1ο περιστ. όχι ακτιν) P(2ο περιστ. όχι ακτιν) P(3ο περιστ. όχι ακτιν) P(4ο ακτιν)

$= 0.25^3 \cdot 0.75$

$= \frac{3}{4^4}$.

(2) Έστω ότι ο χρόνος μετριέται σε λεπτά, $N_1(t)$ ο αριθμός των περιστατικών που χρειάζονται ακτινογραφία στο $[0,t]$ και $N_2(t)$ ο αριθμός των περιστατικών που δεν χρειάζονται ακτινογραφία στο $[0,t]$. Η $\{N_1(t)\}$ είναι ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\frac{20}{60} \cdot 0.75 = 1/4$ περιστατικά το λεπτό ενώ η $\{N_2(t)\}$ είναι ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\frac{20}{60} \cdot 0.25 = \frac{1}{12}$ περιστατικά το λεπτό. Από το θεώρημα διάσπασης τις Poisson είναι και ανεξάρτητες. Ζητάμε την $P(N_1(30)=5 \mid N_1(60)+N_2(60)=15)$.

Έχουμε:

$$P(N_1(30)=5 \mid N_1(60)+N_2(60)=15) = \frac{P(N_1(30)=5,\ N_1(60)+N_2(60)=15)}{P(N_1(60)+N_2(60)=15)}$$

$$= \frac{\sum_{k=5}^{15} P(N_1(30)=5,\ N_1(60)+N_2(60)=15,\ N_1(60)=k)}{P(N_1(60)+N_2(60)=15)}$$

$$= \frac{\sum_{k=5}^{15} P(N_1(30)=5,\ N_1(60)-N_1(30)=k-5,\ N_2(60)=15-k)}{P(N_1(60)+N_2(60)=15)}$$

Οι $N_1(30)$, $N_1(60)-N_1(30)$, $N_2(60)$ είναι ανεξάρτητες λόγω της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων της $\{N_1(t)\}$ και του θεωρήματος διάσπασης. Άρα

$$P(N_1(30)=5 / N_1(60)+N_2(60)=15) = \frac{\sum_{k=5}^{15} \cancel{e^{-\frac{30}{4}}} \frac{(30/4)^5}{5!} \cdot \cancel{e^{-\frac{30}{4}}} \frac{(30/4)^{k-5}}{(k-5)!} \cancel{e^{-\frac{60}{12}}} \frac{(60/12)^{15-k}}{(15-k)!}}{\cancel{e^{-\frac{60}{3}}} \frac{(60/3)^{15}}{15!}}$$

$$= \sum_{k=5}^{15} \frac{15!}{5!(k-5)!(15-k)!} \frac{\left(\frac{30}{4}\right)^k \left(\frac{60}{12}\right)^{15-k}}{\left(60/3\right)^{15}}.$$

(3) Έστω $\{N(t)\}$ η διαδικασία Poisson που περιγράφει τις αφίξεις των περιστατικών και S_i ο χρόνος άφιξης του i-οστού περιστατικού. Έστω ότι οι χρόνοι μετριούνται σε λεπτά. Τότε ζητάμε την $E[S_1 | N(15)=2]$. Από την ιδιότητα των δεσμευμένων χρόνων γεγονότων στην Poisson γνωρίζουμε ότι

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n \mid N(t)=n) \stackrel{d}{=} (U_{1:n}, \ldots, U_{n:n})$$

όπου $U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}$ οι διατεταγμένες τ.μ. από n ανεξ. ομοιόμορφες στο $[0,t]$. Συνεπώς

$$E[S_i \mid N(t)=n] = E[U_{i:n}] = \frac{it}{n+1}$$

και στην περίπτωσή μας

$$E[S_1 \mid N(15)=2] = \frac{1 \cdot 15}{2+1} = 5 \text{ λεπτά.}$$

Θέμα 2ο:

(1) Έστω $C(t)$ το κόστος λειτουργίας της μηχανής στο $[0,t]$.
Τότε

$$C(t) = 5 \cdot N(t) + 0.05t + 0.25\, M(t)$$

όπου $N(t)$ = πλήθος επιθεωρήσεων στο $[0,t]$

$L(t)$ = πλήθος διαταραχών στο $[0,t]$

Από στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με αμοιβές έχουμε ότι το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος της λειτουργίας της μηχανής είναι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{\text{Μέσο κόστος σε 1 κύκλο λειτουργίας}}{\text{Μέση διάρκεια 1 κύκλου λειτουργίας}}$$

Η μέση διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας σε λεπτά είναι

$$E[T] = \int_0^\infty t\, g(t)\,dt = \int_0^\infty (1-G(t))\,dt$$

Είναι

$$g(t) = \frac{4}{25} e^{-t/5} + \frac{1}{50} e^{-t/10}, \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow G(t) = \frac{4}{5}\left(1 - e^{-t/5}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - e^{-t/10}\right), \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - G(t) = \frac{4}{5} e^{-t/5} + \frac{1}{5} e^{-t/10}, \quad t \geq 0.$$

Άρα

$$E[T] = \int_0^\infty (1 - G(t))\,dt = \frac{4}{5}\int_0^\infty e^{-t/5}\,dt + \frac{1}{5}\int_0^\infty e^{-t/10}\,dt$$

$$= \frac{4}{5}\cdot 5 + \frac{1}{5}\cdot 10 = 6.$$

Σε ένα κύκλο λειτουργίας έχουμε:

(i) 1 επιθεώρηση με κόστος 5€,

(ii) $E[L(T)] = E[E[L(T) \mid T]] = E[\underset{\uparrow}{\lambda} T] = E[\frac{60}{60} T] = 6$ διαταραχές

ρυθμός διαταραχών ανά λεπτό

με κόστος $6 \cdot 0,25 = 1,5$€,

(iii) $0.05\, E[T] = 0.05 \cdot 6 = 0.3$ € κόστος καταναλωσης ρεύματος

Άρα

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{5+1.5+0.3}{6} = \frac{2.3}{6} \text{ € / λεπτό.}$$

(2). Ο μετασχηματισμός L-S της $G(t)$ είναι

$$\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dG(t) = \frac{4}{25}\int_0^\infty e^{-(s+\frac{1}{5})t}\,dt + \frac{1}{50}\int_0^\infty e^{-(s+\frac{1}{10})t}\,dt$$

$$= \frac{4}{25}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{5}} + \frac{1}{50}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{8(s+\frac{1}{10})+(s+\frac{1}{5})}{50(s+\frac{1}{5})(s+\frac{1}{10})} = \frac{9s+1}{50(s+\frac{1}{5})(s+\frac{1}{10})}$$

Άρα ο μετασχηματισμός L-S της $M(t)$ είναι

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

$$= \frac{9s+1}{50(s+\frac{1}{5})(s+\frac{1}{10}) - 9s - 1}$$

$$= \frac{9s+1}{50s^2+15s+\cancel{1}-9s-\cancel{1}}$$

$$= \frac{9s+1}{s(50s+6)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{50s+6}$$

Είναι

$$\frac{9s+1}{s(50s+6)} = \frac{A(50s+6)+Bs}{s(50s+6)} = \frac{(50A+B)s+6A}{s(50s+6)}.$$

οπότε

$$\left.\begin{array}{l} 9 = 50A+B \\ 1 = 6A \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} B = \frac{2}{3} \\ A = 1/6 \end{array}$$

Άρα

$$\tilde{M}(s) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50s+6}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{9}\cdot\frac{\frac{3}{25}}{s+\frac{3}{25}} \Rightarrow$$

$$M(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{9}\left(1-e^{-\frac{3}{25}t}\right),\ t\geq 0.$$

Θέμα 3ο:

(1) Είναι

$$R(t)=E[N(t)^2]=\int_0^\infty E[N(t)^2 \mid S_1=x]\,dG(x)$$

Αλλά

$$E[N(t)^2 \mid S_1=x]=\begin{cases}0, & x>t\\ E[(1+N(t-x))^2], & x\le t\end{cases}$$

Άρα

$$R(t)=\int_0^t E[(1+N(t-x))^2]\,dG(x)$$

$$=\int_0^t \left(1+2E[N(t-x)]+R(t-x)\right)dG(x)$$

$$=G(t)+2\int_0^t M(t-x)\,dG(x)+\int_0^t R(t-x)\,dG(x)$$

Όμως από την ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση είναι

$$M(t)=G(t)+\int_0^t M(t-x)\,dG(x)=G(t)+\int_0^t G(t-x)\,dM(x)$$

Οπότε

$$R(t)=\overbrace{2M(t)-G(t)}^{D(t)}+\int_0^t R(t-x)\,dG(x)$$

Αυτή είναι η ανανεωτική εξίσωση για την $R(t)$.

Η λύση της είναι

$$R(t)=D(t)+\int_0^t D(t-x)\,dM(x)$$

$$=2M(t)-G(t)+2\int_0^t M(t-x)\,dM(x)-\underbrace{\int_0^t G(t-x)\,dM(x)}_{=\,M(t)-G(t)}$$

(πάλι από την ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση)

$$=2M(t)-\cancel{G(t)}-M(t)+\cancel{G(t)}+2\int_0^t M(t-x)\,dM(x)$$

$$=M(t)+2\int_0^t M(t-x)\,dM(x).$$

(2) Από Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με αμοιβές

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t A(u)C(u)du]}{t} = \frac{E[\int_0^{S_1} A(u)C(u)du]}{E[S_1]}.$$

Όμως στο $[0, S_1]$ έχουμε $A(u) = u$, $C(u) = S_1$

οπότε

$$E[\int_0^{S_1} A(u)C(u)du] = E[\int_0^{S_1} u S_1 du] = E[S_1 \int_0^{S_1} u du]$$

$$= E[S_1 [\frac{u^2}{2}]_{u=0}^{S_1}] = E[S_1 \frac{S_1^2}{2}] = \frac{1}{2} \cdot E[S_1^3] = \frac{1}{2}\mu_3$$

Επίσης

$E[S_1] = \mu_1$.

Επομένως

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t A(u)C(u)du]}{t} = \frac{\mu_3}{2\mu_1}.$$