# Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα - Σεπτέμβρος 2022

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:** ______________________________ **Α.Μ:** ______________

**ΟΔΗΓΙΕΣ**

**(1)** Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

**(2)** Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σαν να μην έχουν δοθεί.

**(3)** Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας και στα θέματα. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.

**(4)** Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).

**(5)** Διάρκεια διαγωνίσματος : 2 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά. **Καλή Επιτυχία!**

**ΘΕΜΑ 1.**

Από ένα σημείο του οδικού δικτύου περνούν αυτοκίνητα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{N_1(t), t \geq 0\}$ με ρυθμό $\lambda_1$ και δίκυκλα σύμφωνα με μια ανεξάρτητη της πρώτης διαδικασία Poisson $\{N_2(t), t \geq 0\}$ με ρυθμό $\lambda_2$.Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ η διαδικασία αφίξεων οχημάτων και των δύο κατηγοριών, με $N(t) = N_1(t) + N_2(t), t \geq 0$.

**(α)** Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι να περάσουν $n$ οχήματα.

**(β)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα τρία πρώτα οχήματα που θα περάσουν από το σημείο να είναι 1 αυτοκίνητο και 2 δίκυκλα, με αυτή τη σειρά.

**(γ)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα στα 5 πρώτα οχήματα που θα περάσουν από το σημείο, τα 2 να είναι αυτοκίνητα.

**(δ)** Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη μέση τιμή $E[N_1(t)|N(t/2) = k]$.

**ΘΕΜΑ 2.**Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots$ που ακολουθούν συνεχή κατανομή με αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας $F_X(t)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(t)$ και ροπές $E[X^k] = \mu_k < \infty, k = 1, 2, \dots$.Έστω $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n = 1, 2, \dots$ οι στιγμές γεγονότων με $S_0 = 0$. Θέτουμε $B(t) = S_{N(t)+1} - t$ τον υπολειπόμενο χρόνο έως το επόμενο γεγονός από τη στιγμή $t$ και έστω $h(t) = E[B(t)^2]$ η δεύτερη ροπή της $B(t)$.

**(α)** Να διατυπώσετε μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$.

**(β)** Να υπολογίσετε το όριο $a = \lim_{t\to\infty} h(t)$.

**(γ)** Αν η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda$, δείξτε ότι $h(t) = a$ για κάθε $t \geq 0$.

**ΘΕΜΑ 3.**Έξω από την αίθουσα αφίξεων ενός αεροδρομίου βρίσκεται μια στάση λεωφορείου που μεταφέρει επιβάτες σε έναν απομακρυσμένο χώρο στάθμευσης αυτοκινήτων. Επιβάτες φτάνουν στη στάση σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda$. Το λεωφορείο έχει άπειρη χωρητικότητα και όταν περάσει από τη στάση παίρνει όλους τους επιβάτες που περιμένουν. Το λεωφορείο πηγαίνει τους επιβάτες στο parking και επιστρέφει για να πάρει τους επόμενους (αν δεν υπάρχει επιβάτης να περιμένει φεύγει άδειο). Ο χρόνος επιβίβασης και αποβίβασης των επιβατών είναι αμελητέος. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς. Ο χρόνος διαδρομής του λεωφορείου από τη στάση στο parking ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\mu$. Ο χρόνος της διαδρομής από το parking πίσω στη στάση είναι ανεξάρτητος του προηγούμενου και ακολουθεί επίσης εκθετική κατανομή με ρυθμό $\mu$.

**(α)** Υπολογίστε την πιθανότητα όταν φτάσει το λεωφορείο στη στάση να περιμένουν $n$ επιβάτες, για $n \geq 0$.

**(β)** Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό επιβατών που περιμένουν στη στάση όταν φτάσει το λεωφορείο.

**(γ)** Αν κάθε επιβάτης πληρώνει εισιτήριο $r$ ενώ το κόστος λειτουργίας του λεωφορείου είναι ίσο με $c$ ανά μονάδα χρόνου για όσο διάστημα κινείται, να υπολογίσετε το αναμενόμενο μέσο καθαρό κέρδος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

# Στοχαστικά Μοντέλα Σεπτ. 2022 - Απαντήσεις

## ΘΕΜΑ 1

(α) $\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda) \Rightarrow E(S_n) = \dfrac{n}{\lambda}$

(β) Κάθε όχημα είναι αυτοκίνητο μ.π.θ. $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

κ' δίκυκλο μ.π.θ $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$

$$P(A\Delta\Delta) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2$$

(γ) Αρ Αυτοκ $X \sim B\left(5, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

$$P(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^3$$

(δ)

$$N_1(t) = \underbrace{N_1\left(\tfrac{t}{2}\right) + N_1(t/2, t]}_{\text{ανεξάρτητα}}$$

$$E\left(N_1(t) \,\middle|\, N(t/2) = k\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} E\left[N_1(t) \,\middle|\, N_1(t/2)=j,\ N(t/2)=k\right] \cdot P\left[N_1(t/2)=j \,\middle|\, N(t/2)=k\right] \quad (1)$$

Όμως: $E\left[N_1(t) \,\middle|\, N_1(t/2)=j,\ N(t/2)=k\right] =$

$$= E\left[N_1(t) \,\middle|\, N_1(t/2)=j,\ N_2(t/2)=k-j\right] =$$

$$= E\left[N_1(t) \,\middle|\, N_1(t/2)=j\right] = j + E\left[N_1(t/2,t] \,\middle|\, N_1(t/2)=j\right]$$

$$= j + E\left[N_1(t/2,t]\right] = j + \frac{\lambda_1 t}{2} \quad (2)$$

λόγω ανεξαρτησίας των $N_1(t/2)$ κ' $N_2(t/2)$

και των $N_1(t/2)$ κ' $N_1(t/2,t]$.

Επίσης για την $P\left[N_1(t/2)=j \mid N(t/2)=k\right]$

έχουμε ότι δοθέντος $N(t/2)=k$,

$N_1(t/2) \sim B\left(k, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$, επομένως

$$P\left(N_1(t/2)=j \,\middle|\, N(t/2)=k\right) = \binom{k}{j}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{j}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-j} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις ②, ③ στην ① παίρνουμε

$$E\left(N_1(t) \mid N(t/2)=k\right) = \sum_{j=0}^{k} \left(j+\frac{\lambda_1 t}{2}\right)\cdot\binom{k}{j}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{j}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-j}$$

$$= \frac{\lambda_1 t}{2} + \frac{k\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$ , όπου ο δεύτερος όρος

προκύπτει από τη μέση τιμή της $B\left(k, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$.

Εναλλακτικά το αποτέλεσμα μπορεί να υπολογιστεί με πιο άμεσο τρόπο ως εξής:

$$E\left[N_1(t) \mid N(t/2)=k\right] = E\left[N_1(t/2) + N_1(t/2,t) \mid N(t/2)=k\right]$$

$$= E\left[N_1(t/2) \mid N(t/2)=k\right] + E\left[N_1(t/2,t) \mid N(t/2)=k\right].$$

Όμως επειδή $N_1(t/2) \mid N(t/2)=k \sim B\left(k, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

προκύπτει $E\left(N_1(t/2) \mid N(t/2)=k\right) = \frac{k\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

Ενώ λόγω ανεξαρτησίας των $N_1(t/2,t)$ και $N(t/2)$

$$E\left(N_1(t/2,t) \mid N(t/2)=k\right) = \frac{\lambda_1 t}{2}$$

Επομένως $E\left[N_1(t) \mid N(t/2)=k\right] = \frac{\lambda_1 t}{2} + \frac{k\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

## Θέμα 2

(α) $h(t) = E\left[B(t)^2\right] = \int_0^\infty E\left[B(t)^2 \mid X_1 = u\right] dF_X(u)$

$$E\left(B(t)^2 \mid X_1 = u\right) = \begin{cases} (u-t)^2, & u > t \\ h(t-u), & u \leq t \end{cases}$$

$$h(t) = \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) + \int_t^\infty (u-t)^2 dF_X(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = \delta(t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u), \quad \text{όπου } \delta(t) = \int_t^\infty (u-t)^2 dF_X(u).$$

(β) Εφαρμόζουμε το Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα:

Η $\delta(t)$ γράφεται:

$$\delta(t) = \int_t^\infty (u-t)^2 dF_X(u) = \int_0^\infty \left[\max(u-t, 0)\right]^2 dF_X(u)$$

$$= E\left[\max(X-t, 0)^2\right]$$

Όμως η $Z = \max(X-t, 0)$ είναι φθίνουσα ως προς $t$ και $Z \geq 0$ επομένως και η $Z^2$ είναι φθίνουσα ως προς $t$ $\Rightarrow E(Z^2) \downarrow_t$

Επίσης $\delta(t) = \int_t^\infty (u-t)^2 dF_X(t) \le \int_0^\infty (u-t)^2 dF_X(t)$

$= E[(X-t)^2] = E(X^2 - 2t\cancel{X} + t^2) = E(X^2) - t^2 \le E(X^2) = \mu_2 < \infty$

Επομένως η $\delta(t) = \delta_1(t) - \delta_2(t)$ όπου

$\delta_1(t) = \delta(t)$, $\delta_2(t) = 0$ κ' οι $\delta_1(t), \delta_2(t)$

είναι μη αρνητικές, φθίνουσες κ' φραγμένες

συναρτήσεις του $t$.

Τέλος $\int_0^\infty |\delta(t)|\, dt = \int_{t=0}^\infty \delta(t)\, dt =$

$= \int_{t=0}^\infty \int_{u=t}^\infty (u-t)^2 dF_X(u)\, dt = \int_{u=0}^\infty \int_{t=0}^u (u-t)^2 dt\, dF_X(u) =$

$= \int_{u=0}^\infty \int_{t=0}^u (t-u)^2 dt\, dF_X(u) = \int_{u=0}^\infty \int_{y=0}^u y^2 dy\, dF_X(u)$

$= \int_{u=0}^\infty \frac{u^3}{3} dF_X(u) = \frac{1}{3} E(X^3) = \frac{1}{3}\mu_3 < \infty$

Επομένως ισχύουν οι ικανές συνθήκες του Βασικού Ανανεωτικού Θεωρήματος και

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^{\infty} \delta(t)\,dt}{E(X_1)} = \frac{\mu_3}{3\mu_1} = a$$

(γ) Όταν η διαδικασία είναι Poisson η κατανομή της $X$ είναι $Exp(\lambda)$, επομένως

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$, $E(X^3) =$

$$\int x^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int \frac{x^3 \lambda^4 e^{-\lambda x} 3!}{3!\,\lambda^3} dx = \frac{3!}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^3}$$

και το $a$ παίρνει την τιμή $\dfrac{E(X^3)}{3E(X)} = \dfrac{\frac{6}{\lambda^3}}{\frac{3}{\lambda}} = \dfrac{2}{\lambda^2}$

δηλαδή $\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{2}{\lambda^2}$.

Όμως στην περίπτωση της διαδικασίας Poisson, η ανανεωτική συνάρτηση έχει κλειστό τύπο $m_X(t) = \lambda t$, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο για τη γενική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης:

$$h(t) = \delta(t) + \int_0^t \delta(t-u)\,dm_X(u) = \delta(t) + \int_0^t \delta(t-u)\lambda\,du$$

[θέτουμε $y = t-u$]

$$h(t) = \delta(t) + \lambda \int_0^t \delta(y)\,dy \qquad (*)$$

Επιπλέον επειδή $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow dF_X(u) = f_X(u)du = \lambda e^{-\lambda u} du$ ισχύει

$$\delta(t) = \int_t^\infty (u-t)^2 dF_X(u) = \int_t^\infty (u-t)^2 \lambda e^{-\lambda u} du = \left(\begin{matrix}\text{θέτουμε} \\ s = u-t\end{matrix}\right)$$

$$= \int_0^\infty s^2 \lambda e^{-\lambda(s+t)} ds = e^{-\lambda t} \int_0^\infty s^2 \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t} E(X^2) = \frac{2e^{-\lambda t}}{\lambda^2}$$

Επίσης $\displaystyle\int_0^t \delta(y)dy = \int_0^t \frac{2e^{-\lambda y}}{\lambda^2} dy = \frac{2}{\lambda^3} \int_0^t \lambda e^{-\lambda y} dy =$

$$= \frac{2}{\lambda^3} F_X(t) = \frac{2}{\lambda^3}(1-e^{-\lambda t})$$

Αντικαθιστώντας στην (*)

$$h(t) = \frac{2e^{-\lambda t}}{\lambda^2} + \lambda \cdot \frac{2}{\lambda^3}(1-e^{-\lambda t}) = \frac{2}{\lambda^2} = a \quad \forall t.$$

Εκτός από την αναλυτική απόδειξη, το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει άμεσα κ' από την αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής κατανομής. Πραγματικά, από την αμνήμονη ιδιότητα προκύπτει ότι ο υπολειπόμενος χρόνος $B(t)$ μέχρι την επόμενη ανανέωση ακολουθεί εκθετική κατανομή $B(t) \sim Exp(\lambda)$, επομένως

$$h(t) = E\left(B(t)^2\right) = \frac{2}{\lambda^2}$$

# ΘΕΜΑ 3

Έστω $Z(t)$ ο αριθμός επιβατών που περιμένουν στη στάση τη χρονική στιγμή $t$. Η $\{Z(t), t\geq 0\}$ είναι αναγεννητική διαδικασία με χρόνους αναγέννησης $S_1, S_2, \ldots$, όπου $S_n$ ο χρόνος της $n^{οστης}$ αναχώρησης του λεωφορείου στη στάση.

Η αναγεννητική ιδιότητα της $\{Z(t)\}$ ισχύει επειδή οι αφίξεις πελατών ακολουθούν διαδικασία Poisson, επομένως ο χρόνος άφιξης του πρώτου πελάτη μετά από την $n^{οστή}$ αναχώρηση του λεωφορείου ακολουθεί $Exp(\lambda)$ κατανομή κ' είναι ανεξάρτητος του χρόνου που μεσολάβησε από την άφιξη του προηγούμενου πελάτη (αμνήμων ιδιότητα).

Η διαδικασία αναχωρήσεων του λεωφορείου από τη στάση είναι ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \ldots$ αιτμ όπου $X = T_1 + T_2$, και $T_1, T_2$ αιτμ $\sim Exp(\mu)$ οι χρόνοι διαδρομής από τη στάση στο parking και επιστροφής, αντίστοιχα. Επομένως $X \sim Erlang(2, \mu)$.

(a) Ο αριθμός πελατών που περιμένουν στη στάση όταν φτάνει το λεωφορείο $N$ είναι ίσος με τον αριθμό αφίξεων στη διάρκεια του ενδιάμεσου χρόνου $X$.

Επομένως δεσμεύοντας ως προς τη διάρκεια του $X$:

$$P(N=n) = \int_0^\infty P(N=n \mid X=t)\, dF_X(t).$$

Επειδή οι αφίξεις πελατών είναι με διαδικασία Poisson($\lambda$),

$$P(N=n \mid X=t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Επίσης $dF_X(t) = f_X(t)\, dt = \dfrac{\mu^2 t e^{-\mu t}}{2} dt$ Επομένως

$$P(N=n) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!} \frac{1}{2} \mu^2 t e^{-\mu t} dt =$$

$$= \frac{\lambda^n \mu^2}{2n!} \int_0^\infty t^{n+1} e^{-(\lambda+\mu)t} dt =$$

$$= \frac{\lambda^n \mu^2}{2n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(\lambda+\mu)^{n+2}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)^{n+2} t^{n+1} e^{-(\lambda+\mu)t}}{(n+1)!} dt}_{=1}$$

$$= \frac{n+1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 = \binom{n+2-1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2$$

δηλαδή η $N$ ακολουθεί αρνητική διωνυμική : αριθμός αποτυχιών μέχρι τις δύο πρώτες επιτυχίες, με $p = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$.

(β) Για την $E(N)$ :

$$E(N) = \int_0^{\infty} E(N \mid X=t)\, dF_X(t) = \int_0^{t} \lambda t \, dF_X(t) = \lambda \int_0^{t} t \, dF_X(t) =$$

$$= \lambda E(X) = \lambda \cdot \frac{2}{\mu} .$$

(γ) Από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη, προκύπτει ότι το μέσο κέρδος ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με

$$g = \frac{E(C)}{E(X)} ,$$ όπου $C$ το κέρδος στη διάρκεια

ενός κύκλου της ανανεωτικής διαδικασίας, δηλαδή στο διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών αναχωρήσεων, κ' $X$ το μήκος του κύκλου για το οποίο είδαμε ότι $X \sim Erlang(2, \lambda)$.

Το κέρδος ενός κύκλου είναι ίσο με τα έσοδα $r.N$ μείον τα έξοδα $cX$ : $C = rN - cX$

Επομένως $E(C) = r E(N) - c E(X) = r\lambda \frac{2}{\mu} - c \frac{2}{\mu} = \frac{2(r\lambda - c)}{\mu}$

και $g = \dfrac{E(C)}{E(X)} = r\lambda - c .$

Ο τύπος για το μέσο κόστος θα μπορούσε να υπολογιστεί και απευθείας χωρίς

την εφαρμογή του ανανεωτικού θεωρήματος
επειδή στο συγκεκριμένο πρόβλημα τα κόστη
δεν σχετίζονται με τον ανανεωτικό κύκλο.

Συγκεκριμένα, αφού έρχονται κατά μέσο όρο
$\lambda$ πελάτες/μονάδα χρόνου στη στάση και
όλοι κάποια στιγμή μπαίνουν στο λεωφορείο,
επομένως πληρώνουν εισιτήριο, το μέσο
έσοδο του λεωφορείου ανά μονάδα χρόνου
είναι ίσο με $r\lambda$. Επίσης το μέσο κόστος
λειτουργίας ανά μονάδα χρόνου είναι $C$,
επομένως το καθαρό κέρδος ανά μονάδα
χρόνου είναι ίσο με $r\lambda - C$.