

Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα Τελική εξέταση, 23 Ιουνίου 2021

Θ01: Σε μια τράπεζα φθάνουν πελάτες για αναλήψεις και καταθέσεις σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς 15 και 5 την ώρα αντίστοιχα. Η τράπεζα ανοίγει κάθε ημέρα λειτουργίας της στις 8:00.

- (1) Ποια είναι η αναμενόμενη ώρα άφιξης του 48ου πελάτη που προσέρχεται για ανάληψη, δεδομένου ότι την πρώτη ώρα λειτουργίας της τράπεζας έφθασαν 18 πελάτες για αναλήψεις και 5 για καταθέσεις;
- (2) Ποια είναι η αναμενόμενη ώρα άφιξης του 5ου πελάτη που προσέρχεται για κατάθεση, δεδομένου ότι την πρώτη ώρα λειτουργίας της τράπεζας έφθασαν 18 πελάτες για αναλήψεις και 5 για καταθέσεις;
- (3) Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των πελατών που φθάνουν στην τράπεζα για ανάληψη μέχρι την άφιξη του πρώτου πελάτη που προσέρχεται για κατάθεση.
- (4) Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των πελατών που έφθασαν στην τράπεζα για ανάληψη σε μια ώρα λειτουργίας της τράπεζας, δεδομένου ότι ο συνολικός αριθμός πελατών που έφθασαν σε αυτή την ώρα λειτουργίας της τράπεζας ήταν 40.
- (5) Αν η προμήθεια της τράπεζας για κάθε ανάληψη είναι 20 λεπτά και για κάθε κατάθεση 50 λεπτά, να βρεθεί το αναμενόμενο συνολικό ποσό προμηθειών της τράπεζας για τους πελάτες που φθάνουν κατά τη διάρκεια μιας ώρας λειτουργίας της.
- (6) Αν η προμήθεια της τράπεζας για κάθε ανάληψη είναι 20 λεπτά και για κάθε κατάθεση 50 λεπτά, να βρεθεί το αναμενόμενο συνολικό ποσό προμηθειών της τράπεζας σε μια ώρα λειτουργίας της κατά την οποία αφίχθηκαν συνολικά 40 πελάτες.

Θ02: Έστω ότι οι επιθεωρήσεις μιας μηχανής γίνονται τις στιγμές των γεγονότων S_1, S_2, \dots μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων ανανέωσης Erlang(2, λ) (δηλ. με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ και $f_X(t) = 0, t < 0$). Το κόστος ενέργειας για τη λειτουργία της μηχανής είναι c ανά χρονική μονάδα λειτουργίας και το κόστος ανά επιθεώρηση είναι k ευρώ.

- (1) Να βρεθεί ο μέσος αριθμός επιθεωρήσεων $m(t) = E[N(t)]$ μέχρι τη χρονική στιγμή t .
- (2) Να γραφεί μια ανανεωτική εξίσωση για το μέσο συνολικό κόστος ενέργειας και επιθεωρήσεων $h(t)$ που έχει συσσωρευθεί μέχρι τη χρονική στιγμή t .
- (3) Αν $X(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ είναι ο χρόνος μεταξύ της προηγούμενης και της επόμενης επιθεώρησης τη στιγμή t , να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος όρος της $X(t)$, δηλαδή το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t X(u) du \right]}{t},$$

χρησιμοποιώντας το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Κόστη.

Θ03: Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ , εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ , έναν υπηρέτη και απεριόριστο χώρο αναμονής, όπου κάθε πελάτης που βρίσκει στο σύστημα n πελάτες εισέρχεται σε αυτό με πιθανότητα $\frac{1}{2(n+1)}$, για $n \geq 0$.

- (1) Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας και η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα (p_n) σε συνεχή χρόνο (όταν το σύστημα είναι ευσταθές).
- (2) Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός αφικνούμενου πελάτη στο σύστημα (λαμβάνουμε υπόψη όλους τους πελάτες είτε μπαίνουν στο σύστημα είτε όχι).
- (3) Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός εισερχόμενου πελάτη στο σύστημα.
- (4) Να υπολογιστεί η μέση διάρκεια του κύκλου απασχόλησης του συστήματος (δηλ. η μέση διάρκεια από τη στιγμή που έναν πελάτη βρίσκει το σύστημα κενό και εισέρχεται σε αυτό μέχρι τον επόμενο πελάτη που θα βρει το σύστημα κενό και θα εισέλθει σε αυτό).

Βαθμολογικά ισοδύναμα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 1 ώρα και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!