

# Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

## Τελική εξέταση 12ης Ιουνίου 2013 - Ακαδημ. έτος 2012-2013

**Θέμα 1ο:** (3 βαθμοί) Σε ένα διαδικτυακό ιστότοπο μιας επιχείρησης πληροφορικής καταφθάνουν αιτήσεις για αγορές, επισκευές και υποστήριξη προϊόντων με ρυθμούς 2, 3 και 5 αιτήσεων την ώρα αντίστοιχα σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

- (1) Η πιθανότητα σε μια ώρα να φθάσουν συνολικά 12 αιτήσεις εκ των οποίων οι 3 αφορούν αγορές.
- (2) Η πιθανότητα σε μια ώρα να φθάσουν συνολικά 12 αιτήσεις εκ των οποίων οι 3 πρώτες αφορούν αγορές, οι 7 επόμενες αφορούν επισκευές ή υποστήριξη και οι 2 τελευταίες αφορούν αγορές.
- (3) Η δεσμευμένη πιθανότητα σε μια ώρα να φθάσουν 4 αιτήσεις αγορών, δεδομένου ότι στην ίδια ώρα έφθασαν συνολικά 10 αιτήσεις.
- (4) Ο δεσμευμένος μέσος αριθμός αιτήσεων σε μια ώρα, δεδομένου ότι στο πρώτο μισάωρο της ίδιας ώρας έφθασαν 4 αιτήσεις για αγορές.
- (5) Ο μέσος αριθμός αιτήσεων για υποστήριξη προϊόντων μεταξύ δυο διαδοχικών αιτήσεων για αγορές.
- (6) Ο δεσμευμένος μέσος χρόνος εμφάνισης της τρίτης αίτησης για αγορά σε μια ώρα, δεδομένου ότι στην ίδια ώρα έφθασαν συνολικά πέντε αιτήσεις για αγορές.

**Θέμα 2ο:** (4 βαθμοί) Έστω  $X_1, X_2, X_3, \dots$  ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή  $G(x)$  και  $E[X_1^k] = \mu_k < \infty, k \geq 1$ . Έστω  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n = 1, 2, \dots$  ( $S_0 = 0$ ) η αντίστοιχη ανανεωτική ακολουθία και  $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, t \geq 0$  η αντίστοιχη ανανεωτική διαδικασία. Ορίζουμε, επίσης, για κάθε  $t \geq 0, B(t) = S_{N(t)+1} - t$  να είναι ο προδρομικός ή υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης.

- (1) Να γράψετε μια ανανεωτική εξίσωση για την  $P(t) = P(N(t) \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3)$ , να τη λύσετε και να βρείτε το όριο  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ .
- (2) Να γράψετε μια ανανεωτική εξίσωση για την  $H(t) = E[B(t)^2]$ , να τη λύσετε και να βρείτε το όριο  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t)$ .

Σημείωση: Σε περίπτωση που χρησιμοποιήσετε το βασικό ανανεωτικό θεώρημα για την εύρεση των ορίων, δεν χρειάζεται να αποδείξετε ότι η σχετική συνάρτηση  $D(t)$  της ανανεωτικής εξίσωσης γράφεται ως διαφορά δυο μονότονων, μη αρνητικών συναρτήσεων.

**Θέμα 3ο:** (3 βαθμοί) Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με 1 υπηρέτη, στο οποίο καταφθάνουν πελάτες δυο τύπων 1 και 2, σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα. Κάθε πελάτης, ανεξαρτήτως τύπου, έχει εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης με παράμετρο  $\mu$ . Οι πελάτες τύπου 1 έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι των πελατών τύπου 2, δηλαδή όταν υπάρχουν πελάτες τύπου 1 στο σύστημα ο υπηρέτης εξυπηρετεί αυτούς και αρχίζει να εξυπηρετεί πελάτες τύπου 2 μόνο όταν δεν υπάρχουν πελάτες τύπου 1. Επιπλέον, αν ένας πελάτης τύπου 2 εξυπηρετείται και αφιχθεί πελάτης τυπου 1, ο υπηρέτης διακόπτει την εξυπηρέτησή του και πηγαίνει να εξυπηρετήσει τον πελάτη τύπου 1.

- (1) Να βρεθεί η πιθανότητα να μη διακοπεί η εξυπηρέτηση ενός πελάτη τύπου 2.
- (2) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.
- (3) Να βρεθούν οι μέσοι αριθμοί πελατών τύπου 1 και 2,  $E[Q_1]$  και  $E[Q_2]$  αντίστοιχα.

**Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!**