

• Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες

Έστω χρόνος $t \rightarrow$ τυχαια μεταβλητή $X(t)$

η συλλογή των τυχαιων μεταβλητων

$\{X(t), t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία $(t \in T)$

$\{X_t, t \geq 0\} \quad \{X_t\}_{t \geq 0}$

4) κατηγορίες α) Διακριτός χρόνος t , Διακριτός χώρος καταστάσεων E

β) $\gg \gg$ Συνεχής $\gg \gg$

β) Συνεχής χρόνος, Διακριτός χώρος καταστάσεων

δ) $\gg \gg$ Συνεχής $\gg \gg$

Πχ α) $X_n = X(n) = 1$ ή 0 εδρ το n -οστό προϊόν μιας γραμμής παραγωγής είναι ή όχι ελαττωβ.

β) $X_n =$ μέση θερμοκρασία τη n -οστή μέρα

γ) $X(t) =$ # ^{τηλέφωνων κλήσεων} σε ένα τηλεφωνικό κέντρο σε χρόνο $(0, t]$.

δ) $X(t) =$ τιμή μιας μετοχής σε χρόνο t

Όπως γνωρίζουμε μια τμ X χαρακτηρίζεται πλήρως από την
α.σ.κ $F_X(x) = P(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R}$

αυτόσημα

Ένα τυχαίο διάνυσμα $(X_1, \dots, X_n)$ χαρακτηρίζεται πλήρως από
την από κοινού α.σ.κ $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad x_i \in \mathbb{R}$
 $i=1, \dots, n$

Ανάλογα

Μια στοχαστική διαδικασία περιγράφεται από την κοινή κατανομή των
 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) \quad \forall \infty < t_1 < t_2 < \dots < t_n, \quad n \in \mathbb{N}^+$

Κάποιες κατηγορίες стоχαστικών διαδικασιών:

• **Μαρκοβιανή διαδικασία**: Η στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \in T\}$ με τον όρισμα ότι δεδομένης της τιμής της t $X(t)$ (παρού) οι t $\{X(u), u > t\}$ (μέλλον) είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις t $\{X(s), s < t\}$ (παρελθόν)

Εξ' έγω Ε: χώρο καταστάσεων πεπερασμένο ή αριθμητικό - ΔΙΑΚΡΙΤΟ
→ Μαρκοβιανή αλυσίδα (μία περίπτωση της: η διαδικασία Poisson)

• **Στάσιμες διαδικασίες**: Εξ' $\{X(t), t \in T\}$ και $\{X(t+\tau), t \in T\}$ $\tau > 0$ είναι στοχαστικά ισοδύναμες

• Διαδικασίες με ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Εξ' $\forall n \in \mathbb{N}$ $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ οι t $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ ανεξ.
Διαδικασίες που έχουν ομογενείς προσαυξήσεις

Εξ' $\forall s < t$ η κατανομή της t $X(t) - X(s)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t - s$ και όχι από τις συγκεκριμένες τιμές των s, t .

• Αναμεντικές διαδικασίες

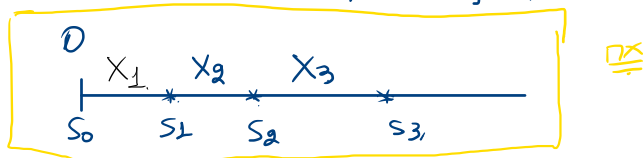
• κλαδικές διαδικασίες

• martingales

• κ.α.

Θεωρούμε μια διαδικασία γεγονότων, έστω $S_0 = 0$ και
 S_n ο χρόνος του n -οστού γεγονότος, $n \geq 1$
 Θεωρούμε $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots$

η $\{S_n, n \geq 1\}$ είναι μια σημειακή διαδικασία
 (Point Process)



ορίζοντας $X_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 1$) χρόνος αναμεσα στο $(n-1)$ -οστό
 και το n -οστό γεγονός

Έχουμε

$\{X_n, n \geq 1\}$ ακολουθία ενδιαμέσων χρόνων

(Αν επιτρέπουμε $X_n = 0$, πολλά γεγονότα μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα)

Απαριθμήτρια Στοχαστική Διαδικασία

Counting Process

Είναι η στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$
όπου η $N(t)$ τ.μ., εκφράζει τον αριθμό των γεγονότων που έχουν συμβεί μέχρι το ^{και} χρόνο t
και ικανοποιεί:

- $N(t)$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$
- $N(s) \leq N(t) \quad 0 \leq s < t$
- $N(t) - N(s) = \# \text{ γεγονότων στο διάστημα } (s, t] \quad 0 \leq s < t$

οπότε

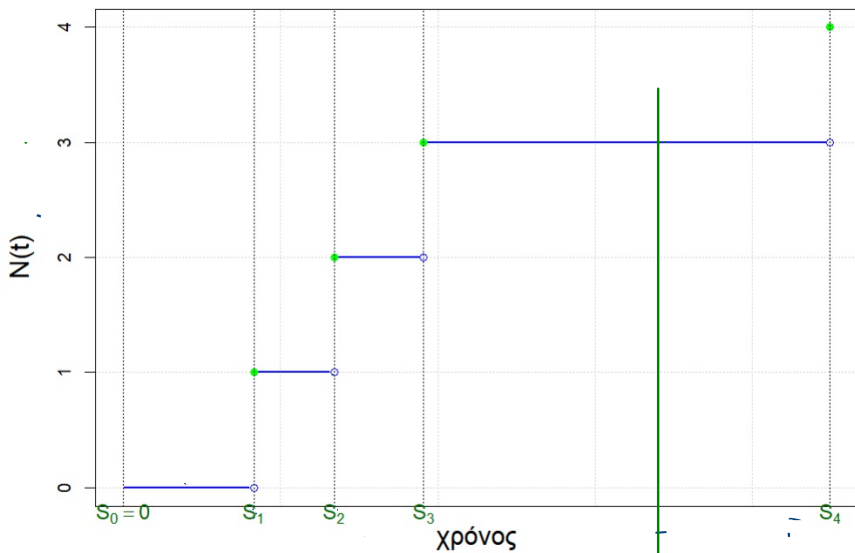
$$N(t) = \# \text{ γεγονότων στο } (0, t] = \sup \{n \geq 0 : S_n \leq t\} \quad t \geq 0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{1_{\{S_n \leq t\}}}$$

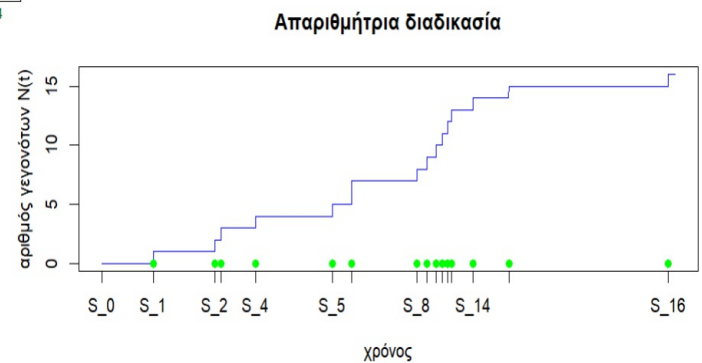
$$1_{\{S_n \leq t\}} = \begin{cases} 1 & S_n \leq t \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$S_n \leq t$$

διαφορετικά



$N(t) = ?$
 t
 θ



ΟΡΙΣΜΟΙ

ROSS 1989
P 210

Η αναριθμητική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέμε ότι έχει

στάσιμες προσωξήσεις (stationary increments.)

Εάν η κατανομή του # των γεγονότων που συμβαίνουν σε κάποιο χρονικό διάστημα εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος

$$N(t_2+s) - N(t_1+s) \stackrel{d}{=} N(t_2) - N(t_1) \quad \forall 0 \leq t_1 < t_2, s > 0$$

Η αναριθμητική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέμε ότι έχει

P 209

ανεξάρτητες προσωξήσεις (independent increments)

Εάν οι αριθμοί των γεγονότων που συμβαίνουν σε ξένα διαστήματα είναι ανεξάρτητοι δηλαδή για $0 < t_1 < \dots < t_n$.

$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξ. γμ

Η ακολουθία $\{S_n, n \geq 1\}$ καλείται ανανεωτική ακολουθία
και η διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία
(Renewal Process)

που παράγονται από την $\{X_n, n \geq 1\}$
Εάν η $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ακολουθία μη αρνητικών, ανεξάρτητων
και ισόνομων τ.μ.

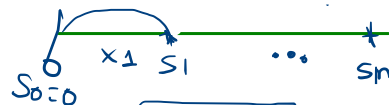
(δηλαδή η αναριθμήτρια είναι ανανεωτική αν έχουμε ανεξ. ισόνομους ενδ. χρόνους)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια ανανεωτική διαδικασία που παράγεται από μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τμ $\{X_n, n \geq 1\}$ με κατανομή $F_X(\cdot)$ χαρακτηρίζεται πλήρως από τωρ $F_X(\cdot)$

$$F_X$$
ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ η οποία παράγεται από τμ $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι στοχαστικά ίδια με τωρ $\{N(t + X_1) - 1, t \geq 0\}$



Το θεώρημα δικαιολογεί το ότι θεωρούμε: $X_L = S_1$

S_1 : 1^{ος} χρόνος ανανέωσης

και για τον ίδιο λόγο

S_n : ο n ^{ος} χρόνος ανανέωσης

$\{N(t), t \geq 0\}$ στοχ. ίδια με τωρ $\{N(t + S_n) - n, t \geq 0\}$

$\left. \begin{array}{l} \text{συχνά} \\ \text{γραφω} \\ F_X \text{ αντί } F_{X_1} \\ \text{όταν έχω} \\ \text{ανεξ. ισον.} \end{array} \right\}$

- Έστω οι $\{X_n, n \geq 1\}$ έχουν κοινή κατανομή F_{X_1} (αν δεν $\exists$ μη ερδωα δρσφω F)
 $\mu = E(X_n) = \int_0^\infty x dF(x)$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_n)$
 $n = 1, 2, \dots$
 και $F(0^-) = 0$ και $F(0^+) = F(0) < 1$ (δηλαδή $P(X=0) < 1$)
 δηλαδή $\{X_n, n \geq 1\}$ ανεξαρτίτες, μη αρνητικές τμ.
 μη ταυτοτικά 0 με πιθανότητα 1
 Άρα $\mu > 0$ $\exists$ πάντα $\mu \in (0, \infty]$

(Εσθ. X_1 έχει διαφορετική κατανομή από τα $X_2, X_3, \dots \rightarrow$ delayed Renewal Process)

$$N^*(t) \quad [0, t] \quad \text{αχέση} \quad S_n, \quad N(t)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \{N(t) \geq n\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Τουλάχιστον } n \text{ γεγονότα στο } [0, t] \\ \text{Το } n\text{-οστό γεγονός συνέβη πριν ή στον χρόνο } t \end{array} \right\} \\ \{N(t) \geq n\} &= \{S_n \leq t\} \\ &\text{Renewal Process} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \{N(t) \leq n\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Το πολύ } n \text{ γεγονότα στο } [0, t] \\ \text{Το } (n+1)\text{-οστό γεγονός συνέβη μετά τον χρόνο } t \end{array} \right\} \\ \{N(t) \leq n\} &= \{S_{n+1} > t\} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \boxed{\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}}$$

Ερώτηση 2 Λ ο.

$$(α) \quad N(t) < n \Leftrightarrow S_n > t$$

$$(β) \quad N(t) \leq n \Leftrightarrow S_n \geq t$$

$$(γ) \quad N(t) > n \Leftrightarrow S_n < t$$

Σ. (συμπλ. της (1))

Λ μπορεί $X_{n+1} = 0$ $S_{n+1} = S_n$ $N(t) > n$

Λ (απνη του (β))

F_X

Η κατανομή της

S_n

και της

$N(t)$

αρκ.
 $F_{S_n}(t) = P[S_n \leq t];$

σ.π.
 $P_n(t) = P(N(t) = n);$

• $n=2$ $F_{S_2}(t) = P(X_1 + X_2 \leq t) = \int_0^t P(X_1 + X_2 \leq t | X_1 = x) dF_{X_1}(x)$

$$F_{S_2}(t) = (F_{X_1} * F_{X_2})(t) = F_X^{*(2)}(t)$$

και γενικά

$$F_{S_3}(t) = (F_{S_2} * F_{X_3})(t)$$

$$S_n = S_{n-1} + X_n$$

$$S_{n-1} = S_{n-2} + X_{n-1}$$

$$F_{S_n}(t) = (F_{S_{n-1}} * F_{X_n})(t) = (F_X * \dots * F_X)(t) = F_X^{*(n)}(t)$$

$F_{S_n}(t) = F_X^{*(n)}(t)$ συνεπαγωγή

$F_X^{*(0)}(t) = 1.$

$$P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$
$$P(N(t) = n) = F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t)$$

$P_n(t) = P(N(t) = n) = F_X^{*(n)}(t) - F_X^{*(n+1)}(t)$

$n \geq 1$

} $n \geq 0.$

$P_0(t) = P(N(t) = 0) = P(S_1 > t) = P(X_1 > t) = 1 - F_X(t)$

$$P(N(t) = n) = P(N(t) \leq n) - P(N(t) \leq n-1)$$
$$= 1 - P(N(t) > n) - (1 - P(N(t) \geq n-1))$$
$$= P(N(t) > n-1) - P(N(t) > n)$$
$$= P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1)$$

H/W.

Άσκηση

Έστω $P(X_n = i) = p(1-p)^{i-1} \quad i \geq 1 \quad (\forall n)$

$S_1 = \#$ δοκιμών μέχρι την 1^η επιτυχία

$S_n = \# \gg$ μέχρι να έχουμε η επιτυχίες

$S_n = X_1 + \dots + X_n \sim$ απρ. διωνυμική

$$P(N(t) = n) = ?$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$\bar{P}(N(t) < \infty) = 1, \quad t \geq 0$$

[απόδειξη] ^{οχι}

$$\begin{array}{l} S_n = X_1 + \dots + X_n \\ \text{I.N.M.A.} \end{array}$$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma. \beta.} \mu$$

$X_1, \dots, X_n$ ανεξ. ίσως μες
 $\mu = E(X_1)$

$$\mu > 0$$

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma. \beta.} \infty$$

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty) = 1$$

Για $0 \leq t < \infty$

$$P(N(t) = \infty) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq t) = 1 - P(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty) = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow P(N(t) < \infty) = 1$$

$S_n \leq t$ για το πολύ ηγερασμένο πλήθος τιμών n

Η πρόταση μας επιτρέπει να γράφουμε $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$