

Παρατήρηση

$$P(X_{(1)} > x \mid N=i) = P(X_1 > x \mid X_1 < X_2) = \frac{P(Z > x, N=i)}{P(N=i)}$$

$$= \frac{\frac{\lambda_1}{2} e^{-\lambda_1 x}}{\frac{\lambda_1}{2}} = e^{-\lambda_1 x} = P(X_{(1)} > x)$$

Το αποτέλεσμα ανεξάρτητο του i

$\Rightarrow X_{(1)}, N$ ανεξάρτητες τ.μ.

Πχ Sigman

Έστω ότι έχουμε 2 Η/Υ. Έστω X_1 ο χρόνος μέχρι να χαλάσει ο Η/Υ no 1 και X_2 ο χρόνος μέχρι να χαλάσει ο Η/Υ no 2

και $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$ με $E(X_1) = 4$ ετη, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ με $E(X_2) = 2$ ετη

Αν ένας από τους 2 χαλάσει, κάνω παραγγελία για νέο υπολογιστή

α) Να υπολογίσουμε $E(X_{(1)})$ όπου $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2\}$

$$P(X_{(1)} > x) = e^{-\lambda_1 x} \quad \text{ή} \quad X_{(1)} \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2) \Rightarrow E(X_{(1)}) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \Rightarrow E(X_{(1)}) = \frac{4}{3}$$

$$E(X_1) = 4 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4}, \quad E(X_2) = 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

β) Ποια η πιθανότητα να χαλάσει πρώτα ο Η/Υ no 1;

$$P(X_1 < X_2) = P(N=1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

γ) Αν ξέρουμε ότι πρώτα χαλάει ο Η/Υ no 1 ποιος είναι ο μέσος χρόνος μέχρι

της παραγγελιάς $E(X_{(1)} \mid N=1)$ ανεξ $E(X_{(1)}) = \frac{4}{3}$

⑤ Έστω $X_1, \dots, X_n \sim \exp(\lambda)$, ανεξάρτητες τμ.
 τότε $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$ (Erlang (n, λ))
 έχουμε δείξει ότι $\tilde{F}_{S_n}(s) = (\tilde{F}_X(s))^n$

As το αποδείξουμε με μετασχηματισμό Laplace

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = (\tilde{F}_X(s))^n \quad \text{όπου} \quad \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \quad \text{άρα} \quad \tilde{F}_{S_n}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n$$

Έστω $Y \sim \Gamma(n, \lambda)$, $f_Y(y) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y}$ σ.π.π.

$$\tilde{F}_Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} \underbrace{\frac{dF_Y(t)}{f_Y(t)dt}}_{f_Y(t)} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \frac{\lambda^n}{(\lambda + s)^n} \int_0^\infty \underbrace{\frac{(\lambda + s)^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-(\lambda + s)t}}_{\text{σ.π.π. } \Gamma(n, \lambda + s)} dt = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n$$

άρα $Y \stackrel{d}{=} S_n$ ή $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

$\textcircled{6}^{\text{ΕΓΩ}}$ $X_1, X_2, \dots$ ανεξ. @ λ όμοιες τυ $X_i \sim \exp(\lambda)$,
 Αφαιρου (να τη νω ως ιδιοτητα της εκθετικής)

Εστω $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ και $N \sim \text{Geom}(p)$,

N ανεξάρτητα των $X_1, \dots, X_n$

$$P(N=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \quad n=1,2,\dots \quad \left(\begin{array}{l} \# \text{δοκιμιών} \\ \text{μexp 1 η επιτ.} \end{array} \right)$$

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i \sim ;$$

$$F_{S_N}(s) = \tilde{P}_N(F_X(s)) \quad \text{Λύση}$$

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = \frac{P_X(\tilde{F}_X(s))}{1 - (1-p)\tilde{F}_X(s)} \quad \text{όπου } \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$P_N(z) = E(z^N) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \underbrace{(1-p)^{n-1}}_{\text{σπ}} \cdot p = \frac{p(z)}{1 - (1-p)z}$$

Ετσι

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = \frac{p\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)}{1 - (1-p)\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\boxed{\lambda p}}{\boxed{\lambda p} + s} \quad \text{δηλαδή } S_N \sim \exp(\lambda p)$$

⑦ Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \exp(\lambda)$ ανεξ. τμ.
 $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ οι αντίστοιχοι διατεταγμένοι χρόνοι

Για $D_i = \begin{cases} X_{1:n} & i=1 \\ X_{i:n} - X_{i-1:n} & i > 1 \end{cases} \quad (X_{0:n} = 0)$

(η μηχανές τίθενται σε λειτουργία τα χρονικά σημεία 0,
 $X_{1:n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ο χρόνος που θα χαλάσει 1η φορά κάποια μηχανή

$$X_{n:n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

Έχω αποδείξει ότι $D_1 = X_{1:n} \stackrel{= X(1)}{\sim} \exp(n \cdot \lambda)$ Έστω $N=j$
 Παρατηρώ ότι $X_{2:n} = \min\{X_i, i \neq j\}$

$X_{2:n} - X_{1:n} = D_2$ κοιτάω το χρόνο μετά την βλάβη της j
 Οπότε λόγω τις ανυτήμονες ιδιότητες

Έχω $n-1$ μηχανές, η καθ' μια χρόνο ζωής $X_i!$ (εκτός της j)
 οπότε $D_2 \sim \exp((n-1)\lambda)$

Γενικά $D_i \sim \exp((n-i+1)\lambda)$

με $\tilde{D}_i = (n-i+1)D_i \sim \exp(\lambda)$

Αποδεικνύεται ότι $D_1, D_2, \dots, D_n$ είναι ανεξ. τμ.

$$X_{i:n} = D_1 + D_2 + \dots + D_i$$

ΑΣΚΗΣΗ 13. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ και $Y \sim \text{Exp}(\mu)$, και $Z = X + Y$. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της Z :

1. Απευθείας
2. Μέσω μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes.

έχει γίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 14. Έστω τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_X(s)$, και Y ανεξάρτητη της X με $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$. Δείξτε ότι $P(X < Y) = \tilde{F}_X(\lambda)$.

$$\tilde{F}_X(s) = E(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_X(x)$$

$$\underbrace{P(X < Y)} = \int_0^{\infty} P(X < Y \mid Y=y) dF_Y(y) = \int_0^{\infty} \overbrace{P(X < y \mid Y=y)}^{\text{ανεξ.}} f_Y(y) dy =$$

$$= \int_0^{\infty} F_X(y) \underbrace{\lambda e^{-\lambda y}}_{f_Y(y)} dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{(-e^{-\lambda y})'}_{f_Y(y)} F_X(y) dy = -e^{-\lambda y} F_X(y) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} dF_X(y)$$

$$\begin{aligned} \text{ή } P(X < Y) &= \int_0^{\infty} P(Y > X \mid X=x) dF_X(x) = \int_0^{\infty} \underbrace{P(Y > x)}_{1 - F_Y(x)} dF_X(x) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF_X(x) = \underbrace{\tilde{F}_X(\lambda)} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 16. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ και $Y \sim \text{Exp}(\mu)$, και $Z = \max(X, Y)$. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F_Z(z)$ της Z και ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_Z(s)$.

$$Z = \max(X, Y) \quad X, Y \text{ ανεξ.}$$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z) \cdot P(Y \leq z) =$$

$$= \underbrace{(1 - e^{-\lambda z})}_{\text{for } X} \underbrace{(1 - e^{-\mu z})}_{\text{for } Y} = \underline{\underline{1 - e^{-\lambda z} - e^{-\mu z} + e^{-(\lambda+\mu)z}}} \quad z \geq 0$$

$$\tilde{F}_Z(s) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-sz}}_{\text{Laplace kernel}} dF_Z(z) = \int_0^\infty e^{-sz} (\lambda e^{-\lambda z} + \mu e^{-\mu z} + (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)z}) dz$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+s} + \frac{\mu}{\mu+s} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu+s} \quad \checkmark$$

$$\lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)z} dz + \mu \int_0^\infty e^{-(\mu+s)z} dz + (\lambda+\mu) \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+s)z} dz$$



ΑΣΚΗΣΗ 17. Θέλουμε να κατεβάσουμε δύο αρχεία A, B από το διαδίκτυο. Το αρχείο A είναι διαθέσιμο στις ιστοσελίδες $A_1, \dots, A_n$ και ο χρόνος λήψης από την A_i ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_i . Το αρχείο B είναι διαθέσιμο στις ιστοσελίδες $B_1, \dots, B_m$ και ο χρόνος λήψης από την B_i ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ_i (όλοι οι χρόνοι ανεξάρτητοι μεταξύ τους). Έστω ότι την ίδια χρονική στιγμή αρχίζουμε ταυτόχρονα τη λήψη των δύο αρχείων από όλες τις πηγές.

1. Ποια είναι η πιθανότητα το αρχείο A να κατέβει πριν το αρχείο B ;
2. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος μέχρι να κατέβουν και τα δύο αρχεία.



6. Ένα σύστημα έχει δυο εξαρτήματα και χαλάει μόλις κάποιο από τα εξαρτήματα χαλάσει. Ο χρόνος ζωής του πρώτου εξαρτήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$ (δηλαδή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$), ενώ ο χρόνος ζωής του δεύτερου εξαρτήματος ακολουθεί την κατανομή $Gamma(n, \mu)$ (δηλαδή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_2(t) = \mu^n t^{n-1} e^{-\mu t} / (n-1)!$, $t \geq 0$). Υποθέτοντας ότι οι χρόνοι ζωής των εξαρτημάτων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, να βρεθεί ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος των δυο εξαρτημάτων.

Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 5 - Χωρίο 4