

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Χρήσιμα μαθηματικά εργαλεία για τον προσδιορισμό και μελέτη της κατανομής τυχαίων μεταβλητών και κυρίως αυτών που μπορούν να παρασταθούν ως αθροίσματα άλλων ανεξάρτητων τμ."

Οι πιο χρήσιμοι στις στοχαστικές μεθόδους:

- Πιθανογεννήτριες → Για μελέτη μη αρνητικών ακεραίων τ.μ.
- Μετασχηματισμοί Laplace

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

Τυχαίο
αθροίσμα

$$X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

$$\begin{matrix} X_1 & X_2 & \dots \\ N & \tau(\mu) \end{matrix}$$

αριθ 16ου
αριθ 16ου τωρ X_i

$$E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E(N) E(X_1)$$

Π, θα νο γενν ή τρι ες

Probability Generating function

(ΕΙΟΝΧΘΝΤΑΙ ΑΝΟ ΤΟΥΣ de Moivre και Euler)
ΕΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ 18⁰⁰ αιώνα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X τ.μ με πεδίο τιμών αμέραιους μη αρνητικούς και συνάρτηση πιθανότητας $p_X(k) = P(X=k)$ $k=0,1,\dots$

Η **γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων (πιθανογεννήτρια)** της τ.μ X

ορίζεται από τη σχέση

$$P_X(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) z^k \quad (\text{για δυναμοσειρά})$$

↑
ορίσμα.

← πιθανοτήτων
αποτελεί

$h(X)$ (συγκρίνει)

για το υπόλοιπον $|z| \leq 1$
(κλειστός μοναδιαίος δίσκος)

Γενικά εάν έχω συλλογή πραγ. αριθμών $(a_k)_{k \geq 0}$, $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ είναι γεννήτρια σειρά της $(a_k)_{k \geq 0}$

$a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(z) \big|_{z=0}$

Θυμίζουμε MGF πιθανογεννήτρια $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} t^k$

$$P_X(z) = E(z^X) \stackrel{z=e^t}{=} M_X(t) = E(e^{tX})$$

Ιδιότητες

$$① P_X(0) = f_X(0)$$

$$② P_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) = 1 \quad (*) \quad (\text{for } X < \infty \text{ με πιθαν.})$$

$$③ f_X(k) = P(X=k) = \frac{1}{k!} P_X^{(k)}(0) \quad k=0,1,\dots$$

δηλαδή γνωρίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση παίρνω τις συν. πιθανότητες

($\exists$ 1-1 αντιστοιχία) (για από ονομαζέται ΠΙΘΑΝΟ ΓΕΝΗΤΡΙΑ)

$P_X(z)$ χαρακτηρίζει την κατανομή

Εσθ $P_X(z) = P_Y(z)$, για z σε διάστημα που περιέχει το 0 $\Leftrightarrow f_X(k) = f_Y(k) \quad \forall k$
(X, Y ισόνομοι)

$$④ \quad E((X)_r) = E[X(X-1)(X-2) \cdots (X-r+1)] = P_X^{(r)}(1) \quad r \geq 1$$

παράγοντες ποσότητα r -τάξης

$$\begin{cases} E(X) = P_X^{(1)}(1) \\ E(X(X-1)) = P_X^{(2)}(1) \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} E(X^2) - E(X) = P_X^{(2)}(1) \\ V(X) = E(X^2) - E^2(X) = P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1) - (P_X^{(1)}(1))^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} P_X(z) = E(z^X) \\ P_X''(z) = E(X^2 z^{X-2}) \\ P_X''(z) = E(X(X-1) z^{X-2}) \end{cases}$$

Σχόλιο: $\lim_{s \uparrow 1} P_X(s) = \lim_{s \uparrow 1} E(s^X) = P(X < \infty) \rightarrow$ μας επιτρέπει να ελέγξουμε
Εσθ η μεταβλητή είναι πεπεσμένη.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Εστω $S_n = X_1 + \dots + X_n$ άθροισμα n ανεξάρτητων τ.μ. με πεδίο τιμών μη αρνητικούς ακέραιους, τότε

$$P_{S_n}(z) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(z)$$

απόδειξη

$$\begin{aligned} P_{S_n}(z) &= E(z^{S_n}) = E(z^{X_1 + \dots + X_n}) = E(z^{X_1} \cdot \dots \cdot z^{X_n}) \stackrel{X_i \text{ ανεξ.}}{=} \\ &= E(z^{X_1}) \cdot \dots \cdot E(z^{X_n}) = P_{X_1}(z) \cdot \dots \cdot P_{X_n}(z) \end{aligned}$$

εάν X_i ισόνομες $P_{S_n}(z) = (P_{X_1}(z))^n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξ. & ισόνομων τ.μ. με πιθανογεννήτρια $P_X(z)$
 και τυχαία μεταβλητή N που παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές,
 ανεξάρτητες των $X_i, i=1,2,\dots$ και πιθανογεννήτρια $P_N(z)$
 Έστω $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ τότε $P_{S_N}(z) = P_N(P_{X_1}(z))$
 απόδειξη

$$P_{S_N}(z) = E(z^{S_N}) = E[E(z^{S_N} | N)] \stackrel{\text{απο προηγ. θεωρημα}}{=} E[P_{X_1}^N(z)] = P_N(P_{X_1}(z))$$

(ανολοιτικά $\sum_{n=0}^{\infty} E[z^{S_N} | N=n] P[N=n] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N=n] (P_{X_1}^n(z))^S = P_N(P_{X_1}(z))$)

$$P_N(s) = \sum_n s^n P(N=n)$$

$$E(S_N) = P'_{S_N}(z) \Big|_{z=1} = P'_N(P_{X_1}(z)) \cdot P'_{X_1}(z) \Big|_{z=1} = P'_N(1) \cdot P'_{X_1}(1) = E(N) \cdot E(X_1)$$

} έχη δειχθεί
και
σε προηγούμενο
κεφάλαιο

αναλογία προκύπτει $V(S_N) = E(N) \cdot V(X_1) + (E(X_1))^2 V(N)$
 (ως άσκηση)

ΑΣΚΗΣΗ

H/W

Εστω
Δείκτη $q_j = P(X > j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} p_X(k)$ και έστω $Q_X(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$

$$Q_X(s) = \frac{1 - P_X(s)}{1 - s} \quad s < 1$$

απόδειξη.

Πιθανογεννήτριες κλασικών διακριτών Τ.μ.

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$ $f_X(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$

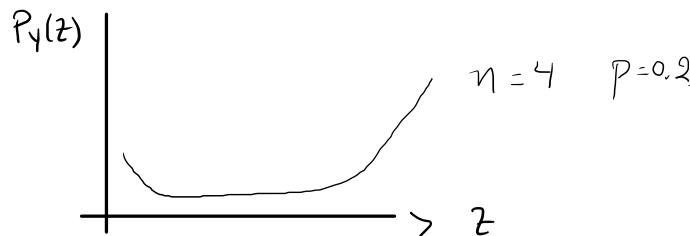
$$P_X(z) = E(z^X) = z^0 \cdot P(X=0) + z^1 P(X=1) = 1 \cdot (1-p) + z \cdot p = 1-p + zp$$

$$\sum z^k P(X=k)$$

$Y \sim \text{Binomial}(n, p)$ $f_Y(k) = \begin{bmatrix} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{bmatrix}_{k=0} \quad \begin{matrix} k=0, 1, \dots, n \\ \text{διαφορετικά} \end{matrix}$

$$P_Y(z) = E(z^Y) = \sum_{k=0}^n z^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (zp)^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow$$

$$P_Y(z) = (1-p + zp)^n$$



Σχόλιο
 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ X_i ανεξ. $\text{Bernoulli}(p)$
 $P_Y(z) = P_X^n(z) = (1-p + zp)^n$

$X \sim \text{Geom}(p)$ • $X = \#$ αποτυχιών μέχρι 1η επιτυχία

$$P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^k p & k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

 Διαφορετικά

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (1-p)^k \cdot p = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (z(1-p))^k = p \cdot \frac{1}{1-z(1-p)} \quad \text{για } |z(1-p)| < 1 \text{ ή } |z| < \frac{1}{1-p}$$

• $X = \#$ επιτυχιών μέχρι 1η αποτυχία

$$P(X=k) = \begin{cases} p^k (1-p) & k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Θα κάνουμε την αποδείξη με β' τρόπο

$$P_X(z) = E[E(z^X / X_1)] = E(z^X / X_1=1)P(X_1=1) + E(z^X / X_1=0)P(X_1=0)$$

$$= E(z^0)(1-p) + E(z^{X+1}) \cdot p = 1-p + z \cdot p \cdot E(z^X) = 1-p + z \cdot p \cdot P_X(z) \Rightarrow P_X(z) = \frac{1-p}{1-zp}$$

$Y =$ αποτέλεσμα 1ης δοκιμής

• $X = \#$ δοκιμών μέχρι 1η επιτυχία

$$P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1} p & k=1,2,\dots \end{cases}$$

 διαφορε

$$P_X(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k (1-p)^{k-1} p = zp \sum_{k=1}^{\infty} (z(1-p))^{k-1} = zp \sum_{u=0}^{\infty} (z(1-p))^u = \frac{zp}{1-z(1-p)} \quad |z(1-p)| < 1$$

$$\underline{Y \sim \text{Neg Binom}}$$

$Y = \#$ αποτυχιών μέχρι η-οστή επιτυχία

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad X_i \sim \text{Geop}(p)$$

$$P(Y=k) = \binom{n+k-1}{k} \cdot (1-p)^k \cdot p^n$$

$A A \cdot \dots \cdot A \underset{\uparrow}{E} A A \underset{\uparrow}{E} \cdot \dots \cdot A A A \underset{\uparrow}{E}$

$$P_Y(z) = P_X^n(z) = \left[\frac{p}{1-z(1-p)} \right]^n$$

Εσθ $Y = \#$ επιτυχιών μέχρι τη η-οστή αποτυχία

$$P(Y=k) = \binom{n+k-1}{k} p^k (1-p)^n \quad Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$P_Y(z) = (P_X(z))^n = \left(\frac{1-p}{1-pz} \right)^n$$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k=0,1,\dots$$

L 0 Διαφορετικά

$$\underline{P_X(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}$$

Παρατηρείστε $P_X^{(r)}(z) = \lambda^r e^{-\lambda(1-z)} = E[(X)_k]$

και $E(X) = P_X^{(1)}(1) = \lambda$

$$V(X) = P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1) - [P_X^{(1)}(1)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Άρα: $E[X(X-1)(X-2)\dots(X-k)] = \lambda^{k+1}$

$X \sim \text{Discrete Uniform}(\{0,1,2,\dots,n-1\})$ $P(X=k) = \frac{1}{n} \quad k=0,1,\dots,n-1$

$$P_X(z) = z^0 \cdot \frac{1}{n} + z^1 \cdot \frac{1}{n} + \dots + z^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1}{n} \frac{1-z^n}{1-z} \quad \text{γεωμετρική σειρά}$$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k=0,1,\dots$$

$\begin{matrix} \text{L} & \text{o} & \text{Διαφορετικά} \end{matrix}$

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)} \quad z \in \mathbb{R}$$

Παρατηρείστε $P_X^{(r)}(z) = \lambda^r e^{-\lambda(1-z)} = E[(X)_k]$

και $E(X) = P_X^{(1)}(1) = \lambda$

$$V(X) = P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1) - [P_X^{(1)}(1)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Άρα: $E[X(X-1)(X-2)\dots(X-k)] = \lambda^{k+1}$

$X \sim \text{Discrete Uniform}(\{0,1,2,\dots,n-1\})$ $P(X=k) = \frac{1}{n} \quad k=0,1,\dots,n-1$

$$P_X(z) = z^0 \cdot \frac{1}{n} + z^1 \cdot \frac{1}{n} + \dots + z^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1}{n} \frac{1-z^n}{1-z} \quad \text{γεωμετρική σειρά}$$

Αντιστροφή Πιθανογεννητριών

Έστω ότι η $P_X(z)$ έχει μορφή ως ρητή συνάρτηση $\frac{N(z)}{D(z)}$ Numerator
Denominator.

$N(z)$, $D(z)$ πολυώνυμα πεπερασμένου βαθμού

Εάν η $P(z)$ δίνεται σακριθώς, μπορούμε να την αναστρέψουμε, χωρίς δυσκολία

Έστω ότι η $N(z)$ έχει m ρίζες. Κάποια σχέση μπορούμε να την έχουμε από το γεγονός ότι η $P(z)$ συχλίνει στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο ($|z| \leq 1$)

Θεωρούμε επίσης ότι η $D(z)$ έχει ℓ "ρίζες" στο κλειστό μοναδιαίο κύκλο.

Οι ℓ αυτοί πόλοι πρέπει να μηδενίζουν και τον αριθμητή, διαφορετικά η $P(z)$ δε θα συχλυνε εκεί
Ετσι:

- Παραγοντοποιούμε τον Παρανομαστή

βαθμού $\ell+m$

$$D(z) = \underbrace{k_D (z-z_1)^* \cdots (z-z_\ell)^*}_{\text{Γαδ.}} \underbrace{(z-z_1^*) \cdots (z-z_m^*)}_{\text{Γαδ. μοναδιαίου κύκλου ρίζες}}$$

και ο αριθμητής γράφεται

βαθμού ℓ

$$N(z) = \underbrace{k_N}_{\text{σταθ.}} (z-z_1) \cdots (z-z_\ell)$$

$$\text{δηλαδή } P(z) = \frac{k}{\prod_{i=1}^m (z-z_i^*)} \quad k = \frac{k_D}{k_N}$$

$$\text{Αφού } P(1)=1 \text{ έχουμε } k = \sum_{i=1}^m (1-z_i^*)$$

$$\text{Συνεπώς } P(z) = \prod_{i=1}^m \frac{(1-z_i^*)}{(z-z_i^*)}, \text{ το οποίο γράφεται}$$

$$P(z) = \frac{A_1}{z_1^* z} + \cdots + \frac{A_m}{z_m^* z} \quad \text{όπου } \frac{A_i}{z_i^* z} = \frac{A_i}{z_i^*} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_i^*}} = \frac{A_i}{z_i^*} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_i^*}\right)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_i}{(z_i^*)^{k+1}} z^k$$

$$\text{Ετσι } f_X(k) = \frac{A_1}{(z_1^*)^{k+1}} + \cdots + \frac{A_m}{(z_m^*)^{k+1}}$$

n x 3 Οικονομίου H/W

$$P_X(z) = \frac{c - 15z}{54 - 63z + 18z^2} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$l = 1$$

$$\underline{DX} \quad P_X(z) = \frac{az+b}{(z-3)(z-\frac{3}{2})(z-\frac{2}{5})}$$

$$P_X(1) = 1 \quad \eta \quad \frac{a+b}{(-2)\frac{3}{5}(-\frac{1}{2})} = 1 \quad \eta \quad a+b = \frac{3}{5} \quad (*) \quad 2a+2b = \frac{6}{5}$$

και η ρίζα $z = \frac{2}{5}$ πρέπει να είναι ρίζα του αριθμητή

$$a \cdot \frac{2}{5} + b = 0 \quad (**) \quad 2a+5b=0$$

$$(*) \& (**) \quad 3b = -6/5 \Rightarrow b = -2/5, \quad a = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

$$P_X(z) = \frac{z-2/5}{(z-3)(z-3/2)(z-2/5)} = \frac{1}{(z-3)(z-3/2)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-3/2}$$

$$| \quad \frac{1}{z-3/2} = A + \frac{B(z-3)}{z-3/2} \xrightarrow{z=3} \frac{1}{3-3/2} = A \quad \eta \quad A = 2/3$$

$$\text{και} \quad \frac{1}{z-3} = \frac{A(z-3/2)}{z-3} + B \xrightarrow{z=3/2} \frac{1}{\frac{3}{2}-3} = B \quad \eta \quad B = -2/3$$

$$P_X(z) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-z/3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}z} = \frac{4}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}z\right)^k - \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}z\right)^k$$

$$\Rightarrow f_X(k) = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad k=0,1,2,\dots$$

$$P_X(z) = \sum z^k \underbrace{f_X(k)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^k \right) z^k$$

A σ κ η δ ε ω.

Άσκηση

Εστω $X_1 \sim \text{Geom}(p_1)$ $P(X_1 = k) = (1-p_1)p_1^k$ $k=0,1,2,\dots$

$X_2 \sim \text{Geom}(p_2)$ $P(X_2 = k) = (1-p_2)p_2^k$ $k=0,1,2,\dots$

X_1, X_2 ανεξ. Να βρεθεί η σ.π. της $Y = X_1 + X_2$

Από θεωρήμα έχουμε $P_Y(z) = P_{X_1+X_2}(z) = P_{X_1}(z) \cdot P_{X_2}(z)$ αφού X_1, X_2 ανεξ.

$$P_{X_1}(z) = \frac{1-p_1}{1-p_1 z} \quad (|p_1 z| < 1) \quad , \quad P_{X_2}(z) = \frac{1-p_2}{1-p_2 z} \quad (|p_2 z| < 1)$$

Άρα $P_Y(z) = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1 z)(1-p_2 z)} = \frac{A}{1-p_1 z} + \frac{B}{1-p_2 z}$

(για $p_1 \neq p_2$)

Είναι $\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-p_2 z} = A + \frac{B(1-p_1 z)}{(1-p_2 z)} \xrightarrow{z=\frac{1}{p_2}} \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-\frac{p_1}{p_2}} = A$ ή $A = \frac{p_1(1-p_1)(1-p_2)}{p_1-p_2}$

και $\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-p_1 z} = \frac{(1-p_2 z)A}{1-p_1 z} + B \xrightarrow{z=\frac{1}{p_1}} \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-\frac{p_2}{p_1}} = B$ ή $B = \frac{-p_2(1-p_1)(1-p_2)}{p_1-p_2}$

Έτσι $P_Y(z) = A \sum_{k=0}^{\infty} (p_1 z)^k + B \sum_{k=0}^{\infty} (p_2 z)^k \Rightarrow$

$$P(Y=k) = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{p_1-p_2} p_1^{k+1} - \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{p_1-p_2} p_2^{k+1}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 > p_2 & \top - \top > 0 \\ p_2 \leq p_2 & \top - \top > 0 \end{pmatrix}$$

για $p_1 = p_2 = p$ $P_Y(z) = \frac{(1-p)^2}{(1-pz)^2} \stackrel{\text{binomial}}{=} (1-p)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k-1}{k} (pz)^k$

ή $P(Y=k) = \binom{2+k-1}{k} (1-p)^2 p^k = (k+1) (1-p)^2 p^k$ (negative binomial # επιτυχιών μέχρι 2 αποτυχίες)

H/W Άσκηση.

Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$. Δείξτε ότι $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda+\mu)$
 X, Y ανεξάρτητες

H/W Άσκηση

Έστω $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $Y \sim \text{Bin}(m, p)$, ανεξ. Δείξτε ότι $X+Y \sim \text{Bin}(n+m, p)$

ΑΣΚΗΣΗ

(H/W)

Έστω a_n η πιθανότητα σε n δοκιμές Bernoulli (με πιθανότητα επιτυχίας p) να εμφανιστεί άρτος αριθμός επιτυχιών. Βρείτε τη γενική συνάρτηση για τον a_n

Λύση

Hint : Δεσμεύον της a_n ως προς X_1 ($= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ η 1η δοκιμή $\in$ διαφορετικά)

Άσκηση HW

Πιχνούμε ένα μη αμερόληπτο νόμισμα με πιθανότητα για "Κεφαλή" = p .
Έστω $r_n = P$ (σε μια ακολουθία n συνεχόμενων ρίψεων, να μας έχουμε δο "Κεφαλές" στη σειρά.)

Δείξε ότι $r_0 = 1, r_1 = p, r_n = q r_{n-1} + p q r_{n-2}, \quad q = 1 - p$

Βρείτε την $Gr(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n s^n$

Λύση

Πίστωση του Χάρη

Ο Χαρης εχει Πιθανότητα p να παραγγείλει. Ένα βράδυ
δε κοιμήθηκε καλά, έτσι την άλλη μέρα ο Χαρης σκεπάζει σωστά τη διεύθυνση
μιας παραγγελίας με πιθανότητα p . Έστω ότι ο # των παραγγελιών εκείνη τη
μέρα ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ .

Ποια είναι η κατανομή των # των παραγγελιών όπου καταγράφηκε
συνολικά η δέσμευση

Лібу

Ζητάμε την κατανομή της $S_N = X_1 + \dots + X_N$ όπου
 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{καταγράφουμε σφάλμα ή διευθύνει της } i \text{ παραγγελίας} \\ 0 & \text{ΔΕ " " " " " " } \end{cases}$

$N = \#$ παραγωγών.

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(N=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$P_X(z) = 1-p+pz, \quad P_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

$$\text{Ex 61 } P_{S_N}(z) = P_N(P_{X_1}(z)) = P_N(1-p+pz) = e^{z(1-p+pz-1)} = e^{-pz}$$

αναγνωρίζουμε ότι $S_N \sim \text{Poisson}(\lambda p)$

ΑΣΚΗΣΗ 4. Έστω ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots$ με $X_i \geq 0$ και $E(X_i) = \mu_X < 1$. Έστω επίσης ακέραια τυχαία μεταβλητή $N \geq 1$ ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \dots$, με συνάρτηση πιθανότητας $p_N(k) = P(N = k)$, $k \geq 1$ και πιθανογεννήτρια $\tilde{p}_N(z)$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $\Pi_N = \prod_{i=1}^N X_i$. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(\Pi_N)$.

$$E(\Pi_N) = \underset{P}{E} \left[\overset{\text{ΘΔΜΤ}}{E(\Pi_N / N)} \right] \overset{\text{ανεξ}}{=} E \left[E(X_1) \cdot \dots \cdot E(X_N) \right] = E \left[\mu_X^N \right] = P_N(\mu_X)$$

$$\Pi_N = X_1 \cdot \dots \cdot X_N$$

$$E(z^N) = P_N(z)$$

$$E(X_1 \cdot \dots \cdot X_N) \overset{\text{ανεξ}}{=} E(X_1) \cdot \dots \cdot E(X_N)$$

H/W

Σειρά ασκήσεων 1 ΣΜΕΕ 2021-22

Μηδυνεας

ΑΣΚΗΣΗ 6. Έστω μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή X με πιθανογεννήτρια $\tilde{p}_X(z) = ce^{\lambda z^k}$, όπου $\lambda > 0, k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$.

(α) Να προσδιοριστεί η σταθερά c .

(β) Να προσδιοριστεί η κατανομή της X .

4. Έστω X μια μη-αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή με πιθανογεννήτρια

$$P_X(z) = \frac{c}{6 - z - z^2}.$$

1. Να προσδιοριστεί η σταθερά c .
2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.
3. Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X=x)$, $x=0,1,2,\dots$
4. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \text{ είναι άρτιος})$.

Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 3 - Χωρίο 2

$$1. P_X(1)=1 \quad \eta \quad \frac{c}{6-1-1} = 1 \quad \eta \quad c=4 \quad \Rightarrow \quad P_X(z) = \frac{4}{6-z-z^2} = \frac{-4}{z^2+z-6} = \frac{-4}{(z-2)(z+3)}$$

$$2. E(X) = P'_X(z) \Big|_{z=1} \quad P'(z) = \left[4(6-z-z^2)^{-1} \right]' = 4(-1)(6-z-z^2)^{-2}(-1-2z)$$

$$E(X) = 4(-1)(6-1-1)^{-2}(-1-2) = \frac{12}{4^2} = \frac{12}{16} = 3/4$$

$$3. P_X(z) = \frac{4}{(z+3)(2-z)} = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{2-z} \quad \eta \quad \frac{4}{z+3} = \frac{A(2-z)}{z+3} + B \xrightarrow{z=-3} B = 4/5$$

$$\text{και} \quad \frac{4}{2-z} = A + \frac{(z+3)B}{2-z} \xrightarrow{z=2} A = 4/5$$

$$P_X(z) = \frac{4}{5} \frac{1}{z+3} + \frac{4}{5} \frac{1}{2-z}$$

$$= \frac{4}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k z^k + \frac{4}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z^k \quad \eta \quad P_X(k) = \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad k=0,1,\dots$$

$$4. P(X \text{ άρτιος}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k)$$

$$P_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) \quad , \quad P_X(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)(-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k)(-1) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k+1)(-1)$$

$$P_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k+1)$$

$$P_X(1) + P_X(-1) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k) \quad \eta \quad P(X \text{ άρτιος}) = P_X(1) + P_X(-1) / 2$$

$$P(X \text{ άρτιος}) = \frac{\frac{4}{6-1-1} + \frac{4}{6-(-1)-1}}{2} = \frac{1 + \frac{4}{6}}{2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

H/W

2εира Αετώσεων
Μηουρνέτας

ΑΣΚΗΣΗ 8. Εστω ακέραια τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ με πιθανογεννήτρια

$$\tilde{p}_X(z) = \frac{5 - 2z}{z^2 - 6z + 8}.$$

Να βρεθεί η κατανομή της X .

H/W

ΑΣΚΗΣΗ 9. Έστω ακέραια τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ με πιθανογεννήτρια

$$\tilde{p}_X(z) = \frac{\alpha}{3z^2 - 10z + 8}.$$

Να προσδιοριστεί η τιμή του α και να βρεθεί η κατανομή της X .

Ζεϊρα ασύσεων 1 Μην οργνεας