

Συχνά έχουμε αθροίσματα της μορφής

$$X_1 + X_2 + \dots + X_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

όπου $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες & ισόνομες τ.μ. και

N διακριτή τιμή μεταβλητή

Πχ

Μνημόνιο απόδοσης ανάληψης : N πελάτες φτάνουν σε μια ψερά.

Ο καθένας σκλώνει ποσό X_i . Το συνολικό ποσό σε μια μέρα $= X_1 + \dots + X_N$

Ουρά αναμονής : N πελάτες σε ένα ταμείο σενα συγκεκριμένο X_i ο χρόνος εξυπηρέτησης του i πελάτη.

Θεωρία Κινδύνου : N απαιτήσεις σε μια ασφαλιστική εταιρία σε 1 εβδομάδα
Έστω X_i το ποσό της i απαίτησης

Μοντέλο Πληθυσμών : Έστω N ο # φυτών που καλλιεργούνται σε μια ηφίσια
και X_i ο # καρπών που δίνει το i φυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξ. & ισότιμες τμ με πεπερασμένη μέση τιμή $E(X)$ και N τμ που παίρνει τιμές στους θετικούς ακεραίους, N ανεξάρτητα των $(X_1, X_2, X_3, \dots)$ και $E(N) < \infty$. Τότε για $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$

$$(i) \quad \underline{E(S_N) = E(X_1) \cdot E(N)} \quad \text{και} \quad (ii) \quad \underline{V(S_N) = V(X_1) E(N) + E^2(X_1) V(N)}$$

$$\begin{aligned} (i) \quad E(S_N) &= \overset{\text{ΘΔΜΤ}}{E(E(S_N | N))} \overset{\text{απόδειξη}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N=n\right) \cdot P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{E\left(\sum_{i=1}^n X_i \mid N=n\right)}_{\text{ισότιμες}} P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot E(X_1) P(N=n) \\ &= E(X_1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n) = E(X_1) \cdot E(N) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N=n\right) \\ E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ = n E(X_1) \end{aligned} \right\}$$

ή απεσα. $E(S_N) = \overset{\text{ΘΔΜΤ}}{E(E(S_N | N))} = E\left(E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right)\right) = E\left(\underbrace{N E(X_1)}_{\text{αριθμός}}\right) = E(X_1) \cdot E(N)$

(ii) $\text{Var}(S_N) = \overset{H/V}{E(\text{Var}(S_N | N))} + \text{Var}(E(S_N | N))$
 όπου $\text{Var}(S_N | N) \overset{\text{160V}}{\propto} N \cdot \text{Var}(X_1)$ και $E(S_N | N) \overset{\text{160V}}{=} N \cdot E(X_1)$

οπότε $\text{Var}(S_N) = E(N \cdot \text{Var}(X_1)) + \text{Var}(N \cdot E(X_1)) = \text{Var}(X_1) \cdot E(N) + E^2(X_1) \text{Var}(N)$

αναλυσή

$$(2) \text{Var}(S_N) = E(S_N^2) - E^2(S_N) \quad (*) \quad (E(S_N) = E(N) E(X_1))$$

3
4x

$$E(S_N^2) \stackrel{\text{DMT}}{=} E(E(S_N^2)/N) = \sum_{n=0}^{\infty} E(S_N^2 / N=n) P(N=n) =$$

$$\stackrel{\text{N indep}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E(S_n^2) P(N=n)$$

$$E(S_n^2) = \text{Var}(S_n) + E^2(S_n) \stackrel{\text{indep}}{=} n \cdot \text{Var} X_1 + (n \cdot E(X_1))^2$$

$$E(S_N^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (n \text{Var} X_1 + n^2 E^2(X_1)) P(N=n) =$$

$$= \text{Var}(X_1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n) + E^2(X_1) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N=n)$$

$$= \text{Var}(X_1) \cdot E(N) + E^2(X_1) E(N^2)$$

$$* \quad V(S_N) = \text{Var}(X_1) E(N) + E^2(X) E(N^2) - [E(N) E(X)]^2$$

$$= \text{Var}(X_1) E(N) + E^2(X) [E(N^2) - E^2(N)] = \text{Var}(X_1) E(N) + E^2(X) \text{Var}(N)$$

4x
η

$$E(S_N^2) = E[E(S_N^2)/N] = E[\text{Var}(S_N/N) + E^2(S_N/N)] =$$

$$= E[N \text{Var}(X_1) + N^2 E^2(X_1)] = E(N) \text{Var}(X_1) + E^2(X_1) E(N^2)$$

Η ισότητα $E(S_N) = E(N) \cdot E(X)$ που αποδείχτηκε στην περίπτωση που N είναι ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \dots$ ισχύει και στην περίπτωση που N είναι χρόνος διακοής

ΟΡΙΣΜΟΣ

Stopping time

Μια τ.μ. N που παίρνει τιμές στους θετικούς ακεραίους είναι χρόνος διακοής εστ. το γεγονός $\{N \leq n\}$ προσδιορίζεται πλήρως από τις $X_1, \dots, X_n$ δηλαδή η τ.μ. $1_{\{N \leq n\}}$ είναι σάρωση των $X_1, \dots, X_n$

ΘΕΩΡΗΜΑ WALD

Εστ. $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξ. & ισόνομος τ.μ. με πεπερ. μέση τιμή $E(X)$, N είναι stopping time με $E(N) < \infty$ τότε $E(S_N) = E(X) E(N)$ τύπος του Wald.

$$E(S_N) = E\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n 1_{\{N \geq n\}}\right) \stackrel{\text{συνολ. εστ.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n 1_{\{N \geq n\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} E[E(X_n 1_{\{N \geq n\}} | X_1, \dots, X_{n-1})]$$

αλλά $1_{\{N \geq n\}} = 1 - 1_{\{N \leq n-1\}}$ συνάρτηση των $X_1, \dots, X_{n-1} \Rightarrow$ Βήμα 1η δεικνύει
 X_n ανεξ. από $X_1, \dots, X_{n-1}$ εξτός της δεικνύει

$$\begin{aligned} \text{Εστ. } E(S_N) &= \sum_{n=1}^{\infty} E[1_{\{N \geq n\}} \cdot E(X_n | X_1, \dots, X_{n-1})] = \sum_{n=1}^{\infty} E[1_{\{N \geq n\}} E(X_n)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E[1_{\{N \geq n\}} \overset{\text{τ.μ.}}{E(X)}] \stackrel{\text{σταθ.}}{=} E(X) \sum_{n=1}^{\infty} E[1_{\{N \geq n\}}] \\ &= E(X) \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n) = E(X) \cdot E(N) \end{aligned}$$

$$E(N) = P(N=1) + 2P(N=2) + 3P(N=3) + \dots$$

$$= P(N=1)$$

$$+ P(N=2) + P(N=2)$$

$$+ \underbrace{P(N=3)} + \underbrace{P(N=3)} + \underbrace{P(N=3)} + \dots$$

↑

$$= P(N \geq 1) + P(N \geq 2) + P(N \geq 3) + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. Θεωρήστε το εξής πείραμα τύχης: Έστω $k \in \{1, \dots, 6\}$. Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι διαδοχικά και $X_1, X_2, \dots$ είναι τα αποτελέσματα των ρίψεων. Έστω $N = \inf\{n \geq 1 : X_n = k\}$ ο αριθμός των ρίψεων έως την πρώτη φορά που το αποτέλεσμα είναι k , και $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ το άθροισμα των N ρίψεων.

(α) Δείξτε ότι δεν ισχύουν οι ικανές συνθήκες για να μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Wald για ανεξάρτητες N και $X_1, X_2, \dots$: $E(S_N) = E(N)E(X)$.

(β) Δείξτε ότι παρ' όλα αυτά ισχύει ότι $E(S_N) = E(N)E(X)$.

Σημείωση: Ο τύπος του Wald ισχύει γενικότερα όταν η N είναι χρόνος διακοπής (*stopping time*). Συγκεκριμένα έστω $\{X_1, X_2, \dots\}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (όχι απαραίτητα ανεξάρτητων). Μια τυχαία μεταβλητή N λέγεται χρόνος διακοπής ως προς την ακολουθία $\{X_n\}$, αν η N παίρνει θετικές ακέραιες τιμές και το γεγονός $\{N = n\}$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές των $X_1, X_2, \dots, X_n$. Η ιδέα είναι η εξής: Έστω ότι ένας παίκτης παίζει ένα παιχνίδι σε βήματα και στο βήμα $n = 1, 2, \dots$ παρατηρεί την τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_n . Σε κάθε βήμα έχει το δικαίωμα να συνεχίσει ή να σταματήσει και να διακόψει το παιχνίδι για πάντα. Η απόφασή του για διακοπή στο βήμα n εξαρτάται μόνο από τις τιμές $X_1, X_2, \dots, X_n$ που έχει παρατηρήσει μέχρι αυτό το σημείο, αλλά μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση αυτών των μεταβλητών (με άλλα λόγια ο παίκτης αποφασίζει να σταματήσει ή όχι βασιζόμενος μόνο στη μέχρι στιγμής ιστορία των $\{X_n\}$ και όχι στις μελλοντικές τιμές ή σε οποιαδήποτε άλλη πληροφορία, αλλά μπορεί να εφαρμόσει οποιοδήποτε κανόνα διακοπής με αυτόν τον περιορισμό). Έστω N η τυχαία μεταβλητή που δείχνει το βήμα στο οποίο θα σταματήσει ο παίκτης. Τότε η N είναι χρόνος διακοπής ως προς την ακολουθία $\{X_n\}$. Στην άσκησή μας είναι εύκολο να δούμε ότι η N είναι χρόνος διακοπής ως προς την ακολουθία $\{X_n\}$, επομένως ο τύπος του Wald συνεχίζει να ισχύει.