ΘΕΜΑ 1, Σεπτ 2022

Από ένα σημείο περνούν αυτοκίνητα $\{N_1(t), t\geq 0\}$ $PP(\lambda_1)$ } ανεξ. διαδικασίες

" δίκυκλα $\{N_2(t), t\geq 0\}$ $PP(\lambda_2)$

$\{N(t), t\geq 0\}$ διαδικασία οχημάτων $PP(\lambda_1+\lambda_2) \rightarrow E(X) =$

E(χρόνος να περάσουν n οχήματα)

$E(S_n) = n \cdot E(X) = \dfrac{n}{\lambda_1+\lambda_2}$

$P(A\Delta\Delta) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2 =$

$= P(Z_1=1, Z_2=2, Z_3=2)$

$= P$ (στα 5 πρώτα οχήμ. τα 2 να είναι αυτοκίνητα)

$P(N_1(t)=2 / N(t)=5) = \dfrac{P(N_1(t)=2, N(t)=5)}{P(N(t)=5)}$

! ☺ $= \binom{5}{2}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^3$

$= \dfrac{e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}\, e^{-\lambda_2 t}\,(\lambda_2 t)^3/3!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^5/5!} = \dfrac{P(N_1(t)=2)P(N_2(t)=3)}{P(N(t)=5)} = \dfrac{P(N_1(t)=2, N_2(t)=3)}{P(N(t)=5)}$

$$\text{δ)}\quad E\Big(\underbrace{N_1(t)}_{\text{αυτοκίνητα}} \,/\, \underbrace{N(t/2)}_{\text{οχήματα}} = k\Big) = E\Big(N_1\big((0,\tfrac{t}{2}]\big) + N_1\big((\tfrac{t}{2},t]\big) \,/\, N\big((0,\tfrac{t}{2}]\big) = k\Big)$$

$$(0,t] \qquad (0,\tfrac{t}{2}] \cup (\tfrac{t}{2},t]$$

$$= E\Big(\underbrace{N_1(t) - N_1(\tfrac{t}{2})} + N_1(\tfrac{t}{2}) \,/\, N(\tfrac{t}{2}) = k\Big)$$

$$= E\Big(N_1\big((0,t/2]\big) \,/\, N\big((0,\tfrac{t}{2}]\big) = k\Big) + E\Big[N_1\big((\tfrac{t}{2},t]\big) \,/\, N\big((0,\tfrac{t}{2}]\big) = k\Big]$$

όπου

$$\overset{\text{αυτ.}}{N_1(t/2)} \,/\, \overset{\text{οχημ.}}{N(\tfrac{t}{2})} = k \sim \text{Binomial}\Big(k, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)$$

$$E\big(N_1(t/2) \,/\, N(t/2) = k\big) = k \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$E\Big(\overset{\text{αυτ.}}{N_1}\big((\tfrac{t}{2},t]\big) \,/\, N\big((0,\tfrac{t}{2}]\big) = k\Big) \underset{\text{ομογ.}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} E\Big(N_1\big((\tfrac{t}{2},t]\big)\Big) = E\big(N_1(\tfrac{t}{2})\big) = \frac{\lambda_1 t}{2}$$

Οπότε

$$E\big(N_1(t) \,/\, N(t/2) = k\big) = \frac{k\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\lambda_1 t}{2}$$

ΘΕΜΑ 3 Ιουνιος 2019

O_1, O_2, O_3 ..... χρονοι λειτουργια

ανεξ & ισόνομοι κυκλοι

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t} + \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Κόστος a ανα κύκλο λειτουργιας

Κόστος b. " " " που υπερβαινει τις t_0 χρον. μοναδες

Κόστος c ανα χρονική μοναδα λειτουργιας

Ζητείται:

Ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λειτουργια της μηχανής.

(C_n, O_n) ? Αν. διαδ. κόστους

$$\Rightarrow C_n = a + b\, I_{\{O_n > t_0\}} + c \cdot O_n$$

$(C_n, O_n) = (a + b I_{\{O_n, t_0\}} + c \cdot O_n, O_n)$ ανεξ & ισον. τμ. (O_n ανεξ ισον.)

$\Rightarrow$ Εφαρμόζω ΣΑΘΚ, αφου $\{C(t), t \geq 0\}$ ειναι αν. διαδ. κόστους

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C(t))}{t} = \frac{E(C_1)}{E(O_1)}$$

$$E(C_1) = a + b \cdot P(O_1 > t_0) + c\, E(O_1)$$

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t} + \frac{1}{2}\lambda^2 t e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\beta^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-\beta t}$$

$$E(O) = \int_0^\infty t\, f_0(t)\,dt = \dots = \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\frac{2}{\lambda} = \frac{3}{2\lambda}$$

$$P(O > t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t}\,dt + \frac{1}{2}\lambda^2 t e^{-\lambda t}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\lambda t_0} + \frac{1}{2}\lambda t_0 e^{-\lambda t_0} + \frac{e^{-\lambda t_0}}{2} = e^{-\lambda t_0}\left(1 + \frac{1}{2}\lambda t_0\right)$$

$$\left(F_{Erlang(n,\lambda)}(t_0) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t_0}(\lambda t_0)^i}{i!} \right)$$

ΘΕΜΑ ΣΕΠΤ 2019 Σ' ένα λούνα παρκ εισέρχονται:

Ενήλικες. $\{N_1(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_1)$ $\lambda_1 = 5/$ώρα.

Παιδιά $\{N_2(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_2)$ $\lambda_2 = 25/$ώρα.

$\Rightarrow$ Άτομα. $\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$ $\lambda = 30/$ώρα

① $E(N_2(1) / \underset{\text{μαζί}}{N(1) = 60}) = 60 \cdot \frac{25}{30} = 50$

$N_2(1) / N(1) = 60 \sim \text{Binomial}\left(60, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{25}{30}\right)$

② $P(\overset{(0,1]}{N_1(1)} = 10 / \overset{(0,2]}{N_1(2)} = 15, \overset{(0,2]}{N_2(2)} = 60)$ $\quad \frac{P(A/B)}{P(A)}$

$= P(N_1(1) = 10 / N_1(2) = 15)$

$= \frac{P(N_1(1) = 10, N_1(2) = 15)}{P(N_1(2) = 15)} = \frac{P(\overset{(0,1]}{N_1(1)} = 10, N_1(2) - N_1(1) = 5)}{P(N_1(2) = 15)}$ ανεξ

$= \frac{P(N_1(1) = 10) \, P(N_1(2) - N_1(1) = 5)}{P(N_1(2) = 15)} \overset{\text{ομγ.}}{=} \frac{P(N_1(1) = 10) \, P(N_1(1) = 5)}{P(N_1(2) = 15)}$

$= \frac{e^{-\lambda_1} \frac{(\lambda_1)^{10}}{10!} \, e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^5}{5!}}{e^{-2\lambda_1} \frac{(2\lambda_1)^{15}}{15!}} = \binom{15}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$P(N(t) = k / N(t+s) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{t}{t+s}\right)^k \left(\frac{s}{t+s}\right)^{n-k}$

(3) $P(\Pi\,\Pi\,\Pi\,\Pi\,E) = \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^4 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

(4) $P\big(N_2(2)=100 \,/\, N_1(1)=35,\ N_2(1)=70\big) = \quad = N(2)-N(1)+N(1)$

$$P\big(N_2(2)=100 \,/\, N_2(1)=70\big) = \frac{P(N_2(2)=100,\ N_2(1)=70)}{P(N_2(1)=70)} = \frac{P(N_2(2)-N_2(1)=30,\ N_2(1)=70)}{P(N_2(1)=70)}$$

$$\overset{\text{ανεξ προσ}}{=} \frac{P(N_2(2)-N_2(1)=30)\,\cancel{P(N_2(1)=70)}}{\cancel{P(N_2(1)=70)}} \underset{\text{προσ.}}{\overset{\text{ομογ.}}{=}} P(N_2(1)=30)$$

$$= e^{-\lambda_2\cdot 1}\frac{(\lambda_2\cdot 1)^{30}}{30!}$$

(5) $E(S_{10}\,/\,N(1)=29) = ;$ $\qquad E(S_{34}\,/\,N(1)=29) = ;$

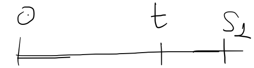
Θ. Campbell

$$E(S_{10}\,/\,N(1)=29) \underline{\underline{\qquad}}\ 10\cdot\frac{1}{29+1} = \frac{10}{30} = 1/3.$$

$$E(S_{34}\,/\,N(1)=29) = 1 + (34-29)\frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{5}{30} = \frac{35}{30}.$$

Έστω

$\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$ $\quad S_1$ χρόνος 1ου γεγονότος



$P(S_1 \leq t)$

$1 - P(N(t)=0)$

$A = E(S_1 / N(t) \geq 1) = \;;$

$$E(S_1) = E(S_1 / N(t)=0)\, P(N(t)=0) + E(S_1 / N(t)\geq 1)\, P(N(t)\geq 1)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} + A \cdot (1 - e^{-\lambda t})$$

$$\Rightarrow A = \frac{1 - e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cdot \lambda t}{\lambda (1 - e^{-\lambda t})}$$

$B = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right) = \;;$

$$B = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \Big/ N(t)=n\right) P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{n} S_i \Big/ N(t)=n\right) P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} E(S_i / N(t)=n)\, P(N(t)=n)$$

Θ. Campbell

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} i \frac{t}{n+1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cancel{(n+1)}}{2} \frac{t}{\cancel{n+1}} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} =$$

$$= \frac{\lambda t^2}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{=1} = \frac{\lambda t^2}{2}$$