Άσκηση 1 υπηρέτης

Έστω σύστημα εξυπηρέτησης, με 2 τύπους πελατών. Οι πελάτες τύπου A φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ_A και οι πελ. τύπου B, με διαδ. Poisson ρυθμού λ_B. Οι διαδικασίες είναι ανεξάρτητες.
Ο χρόνος εξυπηρέτηση ενός πελάτη $\sim exp(\mu)$ (Υποθέτουμε $\overset{\rho_A}{\frac{\lambda_A}{\mu}} + \overset{\rho_B}{\frac{\lambda_B}{\mu}} < 1$)
Οι πελάτες τύπου A έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι στους πελάτες τύπου B:
Εάν ο εξυπηρέτης εξυπηρετεί πελάτη τύπου B και φτάσει πελάτης τύπου A διακόπτει την εξυπηρέτηση του τύπου B και εξυπηρετεί τον τύπου A.
Εξυπηρετεί πρώτα πελάτες τύπου A και όταν δεν υπάρχουν εξυπηρετεί πελάτες τύπου B

Q_A: # πελατών τύπου A στο Σ, S_A χρόνος παραμονής στο Σ πελ. τύπου A
Q_B: # " τύπου B στο Σ, S_B " " " " B

Για τον πελάτη τύπου A, ο B είναι σα να μην υπάρχει!
Έχω $\underset{PP(\lambda_A)}{M} / \underset{exp(\mu)}{M} / 1$ έχω δείξει $E(Q_A) = \frac{\lambda_A/\mu}{1-\lambda_A/\mu} = \frac{\lambda_A}{\mu-\lambda_A}$, $E(S_A) = \frac{1}{\mu-\lambda_A}$

Αφού ο (υπολοιπόμενος) χρόνος εξυπηρέτησης οποιουδήποτε πελάτη $\sim exp(\mu)$
Ο συνολικός # πελατών στο σύστημα δεν επηρεάζεται από τη σειρά που εξυπηρετούνται οι πελάτες, έτσι για το $Q_{ολ}$ έχω
$\underset{PP(\lambda)}{M} / \underset{exp(\mu)}{M} / 1$ $\lambda = \lambda_A + \lambda_B$. $E(Q_{ολ}) = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda_A+\lambda_B}{\mu-(\lambda_A+\lambda_B)}$

Όμως $E(Q_{ολ}) = E(Q_A) + E(Q_B) \Rightarrow$
$$E(Q_B) = \frac{\lambda_A+\lambda_B}{\mu-(\lambda_A+\lambda_B)} - \frac{\lambda_A}{\mu-\lambda_A} = \frac{\lambda_B/\mu}{(1-\frac{\lambda_A}{\mu})(1-\frac{\lambda_A}{\mu}-\frac{\lambda_B}{\mu})}$$

Εφαρμογή για $\lambda_A = 0.2$, $\lambda_B = 0,6$ $\mu = 1$ $E(S_{ολ}) = \frac{1}{1-0.8} = 5$
$E(S_A) = \frac{1}{1-0.2} = 1,25$ $E(S_B) = \frac{1}{(1-0.2)(1-0.8)} = 6.25$

[Άσκηση]

Έχω $M/G/\infty$, αφίξεις σύμφωνα με $PP(\lambda)$, χρόνοι εξυπηρ. με κατ. $B(\cdot)$

$Q(t) = \#$ πελατών στο σύστημα. $T = \min\{t \geq 0 : Q(t) = 0\}$

Έστω S_n : ο n-οστός χρόνος που πελάτης βρίσκει άδειο το σύστημα κατά την άφιξή τους ($\{S_n, n \geq 1\}$ χρόνοι ανανεώσεων!)

Εφαρμόστε ανανεωτικό συλλογισμό στην $h(t) = P(X(t)=0)$ (δεσμεύοντας στην S_1)

$$h(t) = \int_0^\infty P(Q(t)=0 / S_1 = u)\, d\tilde{F}_{S_1}(u)$$

όπου

$$P(Q(t)=0 / S_1 = u) = \begin{cases} P(T \leq t / S_1 = u) & u > t \\ h(t-u) & u \leq t \end{cases}$$

έτσι

$$h(t) = \int_t^\infty P(T \leq t / S_1 = u)\, dF_{S_1}(u) + \int_0^t h(t-u)\, dF_{S_1}(u)$$

όπου

$$\int_t^\infty P(T \leq t / S_1 = u)\, dF_{S_1}(u) = \int_0^\infty P(T \leq t / S_1 = u)\, dF_{S_1}(u) - \int_0^t \overbrace{P(T \leq t / S_1 = u)}^{=1}\, dF_{S_1}(u) = P(T \leq t) - F_{S_1}(t)$$

οπότε

$$h(t) = P(T \leq t) - F_{S_1}(t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_{S_1}(u)$$

$$\left(S_1 = T + X^{\sim exp(\lambda)} \right)$$

ΑΣΚΗΣΗ

$\{N(t), t\geq 0\}$ αν. διαδικασία, συνεχή κατανομή με ενδ. χρόνους $F_X(\cdot)$, $\mu\in(0,\infty)$, $\sigma^2\in[0,\infty)$

$A(t)= t - S_{N(t)}$, $t\geq 0$

Δώστε ανανεωτική εξίσωση για το $E(A(t))$ και υπολογίστε το $\lim_{t\to\infty} E(A(t))$.

$$h(t) = E(A(t)) = \int_0^\infty E(A(t)/S_1=u)\, dF_X(u) \qquad X_1=S_1$$

όπου $E(A(t)/S_1=u) = \begin{cases} E(A(t-u)) = h(t-u) & \text{εαν } u<t \\ t & \text{εαν } u\geq t \end{cases}$

$$h(t) = \int_t^\infty t\, dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) = d(t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) \quad \text{αναν. εξίσωση}$$

$$d(t) = \int_t^\infty t\, dF_X(u) = t(1-F_X(t)) \Rightarrow d'(t) = \underbrace{1-F(t)}_{d_1'(t)} - \underbrace{tf(t)}_{d_2'(t)}$$

$$\Rightarrow d(t) = \int_0^t (1-F_X(u))\,du - \int_0^t u f_X(u)\,du$$

$$= \underbrace{E(X) - \int_0^t u f_X(u)\,du} - \underbrace{\left[E(X) - \int_0^t (1-F_X(u))\,du\right]}$$

$$= \int_0^\infty u f_X(u)\,du - \int_0^t u f_X(u)\,du - \left[\int_0^\infty (1-F_X(u))\,du - \int_0^t (1-F_X(u))\,du\right]$$

$$= \underbrace{\int_t^\infty u f_X(u)\,du}_{d_1(t)} - \underbrace{\int_t^\infty (1-F_X(u))\,du}_{d_2(t)}$$

Είναι $d_1(t) = \int_t^{\infty} u f(u)\, du < E(X)$ μη αρνητική & φραγμ.

$d_1'(t) = -t f(t) < 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow$ d_1 φθίνουσα

$d_2(t) = \int_t^{\infty} (1 - F_X(u))\, du < E(X)$ μη αρνητική & φραγμ.

$d_2'(t) = -(1 - F_X(t)) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow d_2$ φθίνουσα.

Είναι $\int_0^{\infty} |d(t)|\, dt = \int_0^{\infty} t(1 - F(t))\, dt = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} t\, dF_X(u)\, dt$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{u} t\, dt \right) dF_X(u) = \int_0^{\infty} \frac{u^2}{2}\, dF_X(u) = \frac{E(X^2)}{2} < \infty$$

Πληρούνται οι προϋποθέσεις για εφαρμογή ΒΑΘ:

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{\int_0^{\infty} d(t)\, dt}{E(X)} = \frac{E(X^2)}{2E(X)} = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}.$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι οι εισαγωγές σ' ένα νοσοκομείο γίνονται σύμφωνα με $PP(\lambda)$

$\lambda = 12$ άτομα / ημέρα

(i) P(5 εισαγωγές σήμερα 23/05)

(ii) P(5 εισαγωγές σήμερα 23/5 δεδομένου ότι έγιναν 10 εισαγωγές χτες)

(iii) P(50 εισαγωγές στις μέρες 21-23 Μαΐου, δεδομένου ότι έγιναν 10 εισαγ 22/05)

(iv) E(χρόνο για την 3η εισαγωγή)

20/5 21/05 22/05 23/05 σημερα

0 1 2 3

Λύση

(i) Ζητάμε $P(N(3)-N(2)=5) \overset{\text{ομογ. προσ}}{=} P(N(1)=5) = e^{-\lambda\cdot 1}\dfrac{(\lambda\cdot 1)^5}{5!} \overset{\lambda=12}{=} e^{-12}\dfrac{(12)^5}{5!}$

(ii) " $P(N(3)-N(2)=5 \,/\, N(2)-N(1)=10) \overset{\text{ανεξ πρ.}}{=} P(N(3)-N(2)=5) = (i).$

(iii) " $P(N(3)-N(0)=50 \,/\, N(2)-N(1)=10) =$

$$= \frac{P(N(3)-N(0)=50,\ N(2)-N(1)=10)}{P(N(2)-N(1)=10)} =$$

$$= \frac{P(N(3)-N(2)+\overbrace{N(2)-N(1)}+N(1)-\overset{0}{N(0)}=50,\ \overbrace{N(2)-N(1)}=10)}{P(N(2)-N(1)=10)}$$

$$= \frac{P(N(3)-N(2)+N(1)-\overset{0}{N(0)}=40 \ \text{και}\ N(2)-N(1)=10)}{P(N(2)-N(1)=10)}$$

$$= \frac{P(N(3)-N(2)+N(1)-\overset{0}{N(0)}=40)\,\cancel{P(N(2)-N(1)=10)}}{\cancel{P(N(2)-N(1)=10)}}$$

$$= P(\underbrace{\underbrace{N(3)-N(2)}_{\sim Poisson(\lambda)} \overset{\text{ανεξ}}{+} \underbrace{N(1)}_{\sim Poisson(\lambda)}}_{\sim Poisson(2\lambda)}=40) = \frac{e^{-2\cdot 12}(2\cdot 12)^{40}}{40!}$$

$\lambda = 12$

(iv) $E(S_3) = 3E(X_1) = \dfrac{3}{12} = 1/4$ ημέρας

$N(3)-N(2) \overset{d}{=} N(1)$ ομογ προσ.