M/M/1 ουρά με χρόνους εκκίνησης

$\exp(\lambda)$ $\quad\quad$ $\exp(\mu)$

- όταν αδειάσει το σύστημα ο υπηρέτης απενεργοποι.
- όταν έρθει πελάτης, ο υπηρέτης ενεργοποιείται μετά από χρόνο $\sim \exp(\theta)$

$$\rightarrow E(Q) = \lambda \cdot E(S)$$

$$I^- = \begin{cases} 1 & \text{ο υπηρέτης ενεργός κατά τον πελάτη} \\ 0 & \text{'' σε αργία '' ''} \end{cases}$$

$$\rightarrow E(S) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{\infty} E(S / Q^- = j, I^- = i) P(Q^- = j, I^- = i)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} E(S / Q^- = j, I^- = 0) P(Q^- = j, I^- = 0) + \sum_{j=0}^{\infty} E(S / Q^- = j, I^- = 1) P(Q^- = j, I^- = 1)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left((j+1)\cdot\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta}\right) P(Q^- = j, I^- = 0) + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\frac{1}{\mu} P(Q^- = j, I^- = 1)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\frac{1}{\mu} \cdot \underbrace{P(Q^- = j)}_{a_j \overset{PASTA}{=} p_j} + \frac{1}{\theta} \sum_{j=0}^{\infty} P(Q^- = j, I^- = 0)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\frac{1}{\mu} p_j + \frac{1}{\theta} P(I^- = 0) = \frac{1}{\mu}\sum_j j p_j + \frac{1}{\mu}\sum_j p_j + \frac{1}{\theta} P(I^- = 0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E(S) = \frac{1}{\mu}\left(E(Q) + 1\right) + \frac{1}{\theta} P(I^- = 0) \\ E(Q) = \lambda \cdot E(S) \end{cases}$$

PASTA $\quad Q^- \overset{d}{=} Q$, $\quad I^- \overset{d}{=} I$

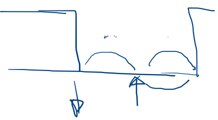
$$P(I^- = 0) = P(I = 0)$$

Νομο little στο εξυπηρέτη. $\quad E(Q_s) = \lambda \cdot E(X) = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \rho$

$''P(Q_s = 1) = P(I = 1)$ $\quad \Big\}\ P(I^- = 0) = 1 - \rho$

$$E(Q) = \lambda \left[\frac{1-\rho}{\theta} + \frac{1}{\psi} E(Q) + \frac{1}{\psi} \right] \Rightarrow E(Q) = \frac{\lambda}{\theta} + \frac{\rho}{1-\rho} \quad E(Q^{M/M/1 \text{ κλασσικό}})$$

$$E(S) = \frac{E(Q)}{\lambda} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\psi(1-\rho)} = \frac{1}{\theta} + E(S^{M/M/1 \text{ κλασσική}})$$



μέσος χρόνος μέχρι να φθάσει

$$E(\tilde{I}) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\theta}$$

$\tilde{I}$ αεργία

Z κύκλο

$\tilde{Y}$ απασχόληση

$$P(I=1) = \rho \overset{\text{ΣΑΘΚ}}{=} \frac{E(\tilde{Y})}{E(\tilde{Y}) + E(\tilde{I})} = \frac{E(\tilde{Y})}{E(\tilde{Y}) + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\theta}}$$

$$\Rightarrow E(\tilde{Y}) = \frac{\rho}{1-\rho}\left(\frac{1}{\psi} + \frac{1}{\theta}\right)$$

$\tilde{I}$ = ~~χρόνος~~ διάρκεια αργίας

$\tilde{Y}$ = χρόνος συνεχούς απασχόλησης σ' ένα κύκλο

Z = διάρκεια ενός κύκλου

$E(\tilde{I}) = \frac{1}{\lambda}$ λόγω αμνήμονης ιδιότητας

$$P_0 = \lim_{t\to\infty} P(Q(t)=0) \overset{\Sigma\Lambda\Theta K.}{=} \frac{E(\tilde{I})}{E(Z)} \Rightarrow E(Z) = \frac{1}{\lambda(1-\varrho)}$$

$\parallel$

$1-\varrho$.

$$E(\tilde{Y}) = E(Z) - E(\tilde{I}) = \frac{1}{\lambda(1-\varrho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\varrho}{1-\varrho}$$

M/M/1 με k-πολιτική ενεργοποίησης:

αφίξεις PP(λ), Χρόνοι εξυπηρέτησης ~ exp(μ), 1 υπηρέτης, FCFS,
Άδειασμα συστήματος ⇒ ακαριαία απενεργοποίηση υπηρέτη.
Ενεργοποιείται ακαριαία, μόλις συσσωρευτούν k πελάτες

$I^- = \begin{cases} 1 & \text{ο υπηρ. ενεργός κατά την άφιξη} \\ 0 & \text{ο υπηρ. ανενεργός} \end{cases}$

$\underline{E(Q)} = \lambda \cdot \underline{E(S)}$ (νόμος little)

$E(S) = E(S / I^- = 0) P(I^- = 0) + E(S / I^- = 1) P(I^- = 1)$

$Q^- \stackrel{d}{=} Q \qquad I^- \stackrel{d}{=} I$ (ιδιότητα PASTA)

είναι $E(S/I^- = 1) = \dfrac{E(Q^- + 1)/I^- = 1)}{\mu}$

όσοι περιμένω να αφιχθούν μετά από εμένα να γίνουμε k.

$E(S | I^- = 0) = \dfrac{E(Q^- + 1 / I^- = 0)}{\mu} + \dfrac{E(k - Q^- - 1 / I^- = 0)}{\lambda}$

Έτσι $E(S) = \dfrac{E(Q^- / I^- = 0)}{\mu} P(I^- = 0) + \dfrac{P(I^- = 0)}{\mu} + \dfrac{k - 1 - E(Q^- / I^- = 0)}{\lambda} P(I^- = 0)$

$+ \dfrac{E(Q^- / I^- = 1)}{\mu} P(I^- = 1) + \dfrac{P(I^- = 1)}{\mu} \Rightarrow$

$E(S) = \dfrac{E(Q^-) + 1}{\mu} + \dfrac{k - 1 - E(Q^- / I^- = 0)}{\lambda} P(I^- = 0)$

όπου $E(Q^- / I^- = 0) = E(Q | I = 0) = \dfrac{k-1}{2}$

αφού $Q | I = 0 \sim \mathrm{Unif}\{0, 1, \ldots, k-1\}$ (αφίξεις σε Poisson διαδ.)

και:

$P(I^- = 0) = P(I = 0) = 1 - P(I = 1) = 1 - P(Q_s = 1) = 1 - E(Q_s) \underset{\text{στο service}}{\overset{\text{Little}}{=}} 1 - \lambda \cdot E(X) = 1 - \rho$

Aвтобоп

Ετ61

$$E(S) = \frac{k-1-\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\lambda}(1-\rho) + \frac{1+E(Q)}{\mu} \Bigg\} \Rightarrow$$

και $E(Q) = \lambda E(S)$

$$E(S) = \frac{k-1}{2\lambda}(1-\rho) + \frac{1+\lambda E(S)}{\mu} \Rightarrow$$

$$E(S) = \frac{k-1}{2\lambda}(1-\rho) + \frac{1}{\mu} + \rho E(S) \quad \text{ή}$$

$$(1-\rho)E(S) = \frac{(k-1)(1-\rho)}{2\lambda} + \frac{1}{\mu} \Rightarrow E(S) = \frac{k-1}{2\lambda} + \frac{1}{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{k-1}{2\lambda} + \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$E(Q) = \underbrace{\frac{k-1}{2}}_{\text{Διαταραχή}} + \frac{\rho}{1-\rho} \longrightarrow \left\{ E\left(Q^{M|M|1}_{\text{κλασ}}\right) \right\}$$

Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που ο υπηρέτης εργάζεται

$$\rho = P(J=1) = \frac{E(\tilde{Y})}{E(\tilde{Y}) + E(\tilde{I})} \quad , \quad E(\tilde{I}) = \frac{k}{\lambda}$$

$$\Rightarrow E(\tilde{Y}) = \frac{k}{\mu-\lambda}$$