Ανάλυση Μέσης Τιμής (Mean Value Analysis)

Αναζητούμε τα $E(Q)$, $E(S)$ (a_j, d_j, p_j)

Θα χρειαστούμε 2 εξισώσεις:

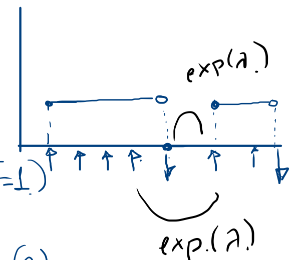
1) Νόμος του Little
2) Υπολογίζουμε $E(S)$ δεσμεύοντας στην Q^- (με κατανομή a_j): Παίρνω $E(S)$ συναρτήσει $E(Q^-)$

Εάν έχω Poisson διαδικασία Αφίξεων $\Rightarrow$ ιδιότητα Pasta $\Rightarrow$ Q^-, Q ισόνομες

1) Ανάλυση Μέσης Τιμής στην $M|G|1|1$

$E(S)$
$E(Q)$
a_i
d_i
P_i

Υποθέτουμε
- Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων (Ενδ. χρόνος $\sim exp(\lambda)$)
- Χρόνος εξυπηρέτησης X έχει σκ $B(\cdot)$ με $E(X) = b$
- 1 υπηρέτης
- Το σύστημα είναι χωρητικότητα 1.



Νόμο του Little: $E(Q) = \lambda \cdot E(S)$ (1)

$$E(S) = E(S/Q^- = 0)P(Q^-=0) + E(S/Q^-=1)P(Q^-=1)$$
$$= b\cdot P(Q^-=0) + 0\cdot P(Q^-=1)$$
$$E(S) = b\cdot P(Q^-=0) = b\cdot a_0 = b\cdot P_0 \quad (2)$$

$$E(Q) = 1\cdot P(Q=1) + \cancel{0\cdot P(Q=0)} = P_1. \quad (3)$$

(1),(2),(3)

$$P_1 = 1 - P_0 = \overbrace{\lambda\cdot b}^{\rho}\cdot P_0. \qquad 1-P_0 = \rho\cdot P_0 \Rightarrow \boxed{P_0 = \frac{1}{1+\rho}}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{\rho}{1+\rho}}$$

PASTA. $a_0 = P_0$ $\quad a_1 = P_1$.

ιδιότητα μεμονωμένων. $a_0 = d_0$ $\quad a_1 = d_1$

$$E(S) = \frac{b}{1+\rho} \qquad E(Q) = \frac{\rho}{1+\rho}$$

~

$Q(t)$ # πελατών στο σύστημα

Εναλλασσόμενη !

$(O_n, n\geq 1)$ $\quad$ $(D_n, n\geq 1)$

X $\quad$ $\sim exp(\lambda)$

$$\lim_{t\to\infty} P(Q(t)=1) = P_1$$
$$= \frac{E(O)}{E(O)+E(D)} = \frac{b}{b+\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda b}{\lambda b+1} = \frac{\rho}{\rho+1}$$

$\frac{1}{\lambda}$

M | M | 1 | 1

Χρόνοι εξυπηρ. $X \sim \exp(\mu)$

$\rho = \lambda \cdot b = \lambda \cdot E(X)$

$b = \frac{1}{\mu}$ $\quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$P_0 = \frac{1}{\frac{\lambda}{\mu} + 1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ $\quad P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = E(Q)$

$E(S) = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu} + 1} = \frac{1}{\lambda + \mu}$

$P_0 = \frac{1}{\rho + 1}$ $\quad P_1 = \frac{\rho}{\rho + 1}$

$E(Q) = \frac{\rho}{\rho + 1}$ $\quad E(S) = \frac{b}{\rho + 1}$

Ανάλυση μέσης τιμής για το M | M | 1

Υποθέτουμε : - Οι αφίξεις είναι $PP(\lambda)$ (οι ενδιαμ. $exp(\lambda)$)
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης $exp(\mu)$
- 1 υπηρέτης
- FCFS FIFO

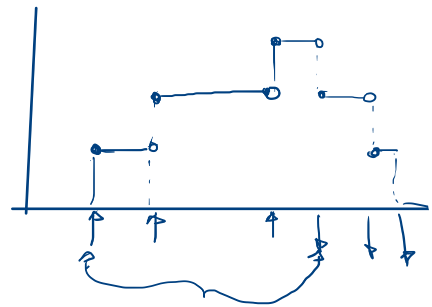
Συνθήκη ευσταθείας:

$\rho < 1$ ή $\lambda \cdot \frac{1}{\mu} < 1$ ή $\lambda < \mu$

Νόμος του Little : $E(Q) = \lambda \cdot E(S)$

Ο πελάτης όταν φτάνει βρίσκει $\bar{Q}$ πελάτες

$$E(S) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{\bar{Q}} + X_{\bar{Q}+1})$$



X_1 ο υπολ. χρον. εξ. του πελάτη που είναι στον υπηρέτη (λόγω αμνήμοσης) $\sim exp(\mu)$

$X_2, \ldots, X_{\bar{Q}}$ οι χρόνοι εξ. των πελατών είναι στην ουρά ανεξ. & ισον $exp(\mu)$

$X_{\bar{Q}+1}$ ο χρόνος του νέου πελάτη $exp(\mu)$

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{\bar{Q}+1} X_i\right) \underset{=}{\text{Wald}} E(\bar{Q}+1) \cdot E(X_1) = \frac{E(\bar{Q})+1}{\mu}$$

ή →

αναλυτικά :

$$E(S) = \sum_{j=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{\bar{Q}+1} X_i / \bar{Q} = j\right) P(\bar{Q}=j) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\bar{Q}+1} E(X_i/\bar{Q}=j)\, P(\bar{Q}=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \underbrace{E(X_i)}_{\frac{1}{\mu}} \underbrace{P(\bar{Q}=j)}_{a_j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)a_j}{\mu} =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(\sum_{j=0}^{\infty} j\, a_j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) = \frac{E(\bar{Q})+1}{\mu}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\, P(\bar{Q}=j)$$

M/M/1

PASTA

$a_i = P_i$

$E(\bar{Q}) = E(Q)$

$$E(Q) = \lambda E(S) \qquad E(S) = \frac{E(\bar{Q})+1}{\mu} \overset{PASTA}{=} \frac{E(Q)+1}{\mu}$$

$$E(Q) = \frac{\lambda}{\mu}\left[E(Q)+1\right] = \rho\left(E(Q)+1\right) \Rightarrow E(Q) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

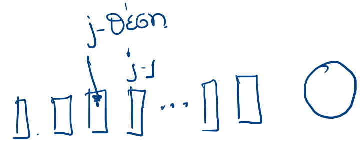
$$E(S) = \frac{E(Q)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (\lambda<\mu)$$

a_i ; d_i ; P_j ;

$$P_j \overset{\text{pasta}}{=} a_j \overset{\text{μεμονωμένων μεταβάσεων}}{=} d_j \qquad j = 0, 1, \dots$$

$$P_j = P(Q = j)$$

Θα εφαρμόσω νόμο little στη j-θέση



$$E(Q_j) = \lambda_j \cdot E(S_j)$$

$$E(Q_j) = 1 \cdot P(Q_j = 1) + 0 \cdot P(Q_j = 0) = P(Q_j = 1) = P(Q \geq j) = \underbrace{\sum_{k=j}^{\infty} P_k}$$

λ_j = ρυθμός άφιξης στη j-θέση $= \lambda \cdot P($να μπορέσω να περάσω από τη j θέση$)$

$= \lambda \cdot P($να υπάρχουν τουλάχιστον j-1 πελάτες μπαίνοντας$)$

$$= \lambda \cdot P(Q^- \geq j-1) = \lambda \cdot \sum_{k=j-1}^{\infty} a_k \overset{\text{pasta}}{=} \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=j-1}^{\infty} P_k}$$

$$E(S_j) = \frac{1}{\mu}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=j}^{\infty} P_k &= \underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{=\rho} \cdot \sum_{k=j-1}^{\infty} P_k \\ \sum_{k=j+1}^{\infty} P_k &= \frac{\lambda}{\mu} \sum_{k=j}^{\infty} P_k \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{αφαιρούμε κατά μέλη}} P_k = \rho \cdot P_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$P_0 = 1 - \rho \ (\text{δες πριν})$$

$$P_k = \rho^2 \cdot P_{k-2} = \dots \rho^k \cdot P_0 \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1, \quad \rho < 1 \qquad P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = 1, \quad \frac{P_0}{1-\rho} = 1$$

$$P_j = (1-\rho)\rho^j, \quad j = 0, 1, \dots$$

Γεωμετρική κατανομή

Χρον.-εξ $\sim exp(\mu)$

$F_S(x)$

$$F_S(x) = P(S \le x) = \sum_{j=0}^{\infty} P(S \le x / Q^{-} = j)\, \underbrace{P(Q^{-} = j)}_{a_j}$$

$$\overset{pasta}{=} \sum_{j=0}^{\infty} p_j \cdot \underbrace{P(S \le x / Q^{-} = j)}$$

$$p_j = (1-\rho)\rho^j$$

$$S / Q^{-} = j \sim \Gamma(j+1, \mu)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^j \int_0^x \frac{\mu^{j+1}}{\Gamma(j+1)} t^j e^{-\mu t} dt$$

$$= \int_0^x (1-\rho) e^{-\mu t} \mu \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu \rho t)^j}{j!} \right) dt = \int_0^x (1-\rho) e^{-\mu t} \mu\, e^{\mu \rho t} dt =$$

$$P(S \le x) = \int_0^x (1-\rho)\mu\, e^{-\mu(1-\rho)t} dt \qquad S \sim exp((1-\rho)\mu)$$

$$E(S) = \frac{1}{(1-\rho)\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad \left(\rho < 1 \quad \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad \lambda < \mu \right)$$

$$P(S > aE(S)) = e^{-a}$$

Δείξαμε ότι $S \sim \exp(\mu(1-\rho))$

$$\tilde{F}_S(s) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s}$$

είναι $S = W + X$ (W ← χρόνος στην ουρά, X ← χρόνος εξυπηρέτησης)

$X \sim \exp(\mu) \Rightarrow \tilde{F}_X(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$

$$\tilde{F}_S(s) = \tilde{F}_W(s) \cdot \tilde{F}_X(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{F}_W(s) = \frac{\frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s}}{\frac{\mu}{\mu+s}} = \frac{(1-\rho)(\mu+s)}{\mu(1-\rho)+s} = (1-\rho)\cdot 1 + \rho\,\frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s}$$

Άρα W είναι 0 με πιθ $1-\rho$ και $\exp(\mu(1-\rho))$ με πιθ ρ

$$P(W>t) = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0$$

$$W / W>0 \sim \exp(\mu(1-\rho))$$