

Ανάλυση Μέσης Τιμής (Mean Value Analysis)

Αναζητούμε τα $E(Q)$, $E(S)$ (a_j, d_j, p_j)

Θα χρειασούμε 2 εξισώσεις:

1) Νόμος του Little

2) Υπολογίζουμε $E(S)$ δεδομένης της Q (με κατανομή a_j): Πάιρντ $E(S)$ συναρτήσει $E(Q)$

Εάν έχω Poisson Διαδικασία Αφίξεων $\Rightarrow$ ιδιότητα PASTA $\Rightarrow Q^-, Q$ ίσες

1] Ανάλυση Μέσης Τιμής στο M/G/1

Υποθέτουμε

- Poisson (λ) διαδικασία αφίξεων (Ενδ. χρόνος $\sim \exp(\lambda)$)
- Χρόνος εξυπηρέτησης έχει σκ $B(\cdot)$ με $E(X) = b$
- 1 υπηρέτης
- Το σύστημα είναι χωρητικότητα 1.

$E(s)$

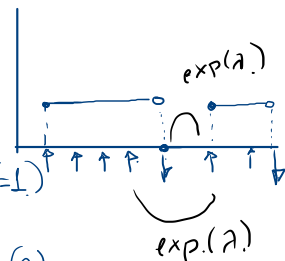
$E(Q)$

a_i

d_i

p_i

Νόμος του Little: $E(Q) = \lambda \cdot E(S)$ (1)



$$E(S) = E(S/Q=0)P(Q=0) + E(S/Q=1)P(Q=1)$$

$$= b \cdot P(Q=0) + 0 \cdot P(Q=1)$$

$$E(S) = b \cdot P(Q=0) = b \cdot a_0 = b \cdot p_0 \quad (2)$$

$$E(Q) = 1 \cdot P(Q=1) + 0 \cdot P(Q=0) = p_1 \quad (3)$$

(1)(2)(3)

$$p_1 = 1 - p_0 = \frac{e}{\lambda \cdot b} \cdot p_0$$

$$1 - p_0 = e \cdot p_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{p_0 = \frac{1}{1+e}}$$

$$\boxed{p_1 = \frac{e}{1+e}}$$

PASTA.

$$a_0 = p_0$$

$$a_1 = p_1$$

ιδιότητα μεμονωμένων.

$$a_0 = d_0$$

$$a_1 = d_1$$

$$E(S) = \frac{b}{1+e}$$

$$E(Q) = \frac{e}{1+e}$$

$Q(t) \neq$ η εξίσωση στο σύστημα

Εναλλακτική!

$$(O_n, n \geq 1)$$

$$(D_n, n \geq 1)$$

$$\sim \exp(\lambda)$$

X

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(Q(t) = 1) = p_1$$

$$= \frac{E(0)}{E(0) + E(D)} = \frac{b}{b + \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda b}{\lambda b + 1} = \frac{e}{e + 1}$$

$\frac{1}{\lambda}$

$$M|M|1|1$$

Χρονο εξυπηρ. $X \sim \exp(\mu)$

$$c = \lambda \cdot b = \lambda \cdot E(X)$$

$$b = \frac{1}{\mu} \quad c = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{\lambda}{\mu} + 1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$E(S) = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu} + 1} = \frac{1}{\lambda + \mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{c+1}$$

$$E(Q) = \frac{c}{c+1}$$

$$P_1 = \frac{c}{c+1}$$

$$E(S) = \frac{b}{c+1}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = E(Q)$$

Ανάλυση μέση τιμής για το M/M/1

- Υποθέτουμε :
- Οι αφίξεις είναι $PP(\lambda)$ (οι ευδιαμ $\exp(\lambda)$)
 - Οι χρόνοι εξυπηρέτησης $\exp(\mu)$
 - 1 υπηρέτης
 - FCFS FIFO

Συνθήκη ευσταθείας:

$$\rho < 1 \quad \text{ή} \quad \lambda \cdot \frac{1}{\mu} < 1 \quad \text{ή} \quad \lambda < \mu$$

Νόμος του Little : $E(Q) = \lambda \cdot E(S)$

Ο πελάτης όταν φτάνει βρίσκει Q πελάτες

X_1 ο χρόν. εξ. του πελάτη που είναι στον υπηρέτη.
(λόγω αμνηστίας) $\sim \exp(\mu)$

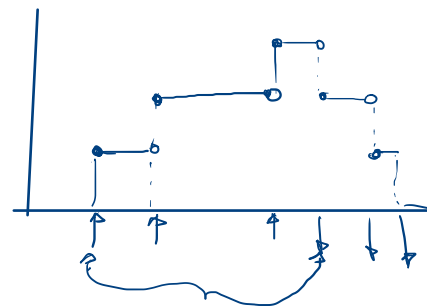
$X_2, \dots, X_{Q-}$ οι χρόνοι εξ. των πελατών είναι στη ουρά
ανεξ. & ίσων $\exp(\mu)$

X_{Q+1} ο χρόνος του νέου πελάτη.

$\exp(\mu)$

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{Q+1} X_i\right) \stackrel{\text{Wald}}{=} E(Q+1) \cdot E(X_1) = \frac{E(Q)+1}{\mu}$$

ή $\rightarrow$



Q value

$$\begin{aligned}
 E(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{\bar{Q}+1} x_i / \bar{Q}=j\right) P(\bar{Q}=j) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\bar{Q}+1} E(x_i / \bar{Q}=j) P(\bar{Q}=j) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \underbrace{E(x_i)}_{\frac{1}{\mu}} \underbrace{P(\bar{Q}=j)}_{a_j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)a_j}{\mu} = \\
 &= \frac{1}{\mu} \left(\sum_{j=0}^{\infty} j a_j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right) = \frac{E(\bar{Q}) + 1}{\mu}
 \end{aligned}$$

(M) | M 1

PASTA

$a_i = p_i$
 $E(\bar{Q}) = E(Q)$

$$E(Q) = \lambda E(s)$$

$$E(s) = \frac{E(\bar{Q}) + 1}{\mu} \stackrel{\text{PASTA}}{=} \frac{E(Q) + 1}{\mu}$$

$$E(Q) = \frac{\lambda}{\mu} [E(Q) + 1] = \rho (E(Q) + 1) \Rightarrow \underline{\underline{E(Q) = \frac{\rho}{1-\rho}}}$$

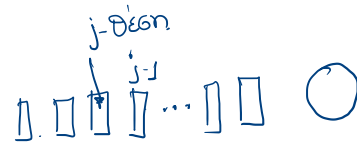
$$\underline{\underline{E(s) = \frac{E(Q)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\rho} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad (\lambda < \mu)}}$$

a_i ; d_i ; p_j ;

$$P_j \stackrel{\text{pasta}}{=} a_j \stackrel{\text{μεμονωμένων μεταβάσεων}}{=} a_j \quad j = 0, 1, \dots$$

$$P_j = P(Q=j)$$

 θα εφαρμόσω νόμο little στη j -θέση



$$\begin{cases} E(Q_j) = \lambda_j \cdot E(S_j) \\ E(Q_j) = 1 \cdot P(Q_j=1) + 0 \cdot P(Q_j=0) = P(Q_j=1) = P(Q \geq j) = \sum_{k=j}^{\infty} P_k \end{cases}$$

$$\lambda_j = \text{ρυθμός αφίξης στη } j\text{-θέση} = \lambda \cdot P(\text{να μπορέσω να περάσω από τη } j\text{-θέση})$$

$$= \lambda \cdot P(\text{να υπάρχουν τουλάχιστον } j-1 \text{ πελάτες μολι ροτώς.})$$

$$= \lambda \cdot P(Q \geq j-1) = \lambda \cdot \sum_{k=j-1}^{\infty} a_k \stackrel{\text{pasta}}{=} \lambda \cdot \sum_{k=j-1}^{\infty} P_k$$

$$E(S_j) = \frac{1}{\mu}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=j}^{\infty} P_k &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \sum_{k=j-1}^{\infty} P_k \\ \sum_{k=j+1}^{\infty} P_k &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \sum_{k=j}^{\infty} P_k \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{αφαιρούμε κατά μέλην}}$$

$$P_k = e \cdot P_{k-1} \quad k=1, 2, \dots$$

$$P_0 = 1 - \rho \quad (\Delta \epsilon \varsigma \epsilon \text{ ορίν})$$

$$P_k = e^2 \cdot P_{k-2} = \dots = e^k \cdot P_0 \quad k=0, 1, \dots$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 & P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^k = 1 \\ e < 1 & \frac{P_0}{1-e} = 1 \end{cases}$$

$$P_j^* = (1-e)e^j, \quad j=0, 1, \dots$$
 Γεωμετρική κατανομή

$E(I) = ?$ για του υπηρετι
 αρχια (κετό σύστημα) $E(Y)$ χρόνος συνεχούς λειτουργίας
 $E(Z) = ?$ διάρκεια έγκλου

$\{Q(t), t \geq 0\}$ στη M/M/1 αναγωγική διαδικασία.
 με χρόνος αναγέννησης τις ευάρξεις έγκλων λειτουργίας
 $\Rightarrow$ Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου αρχίας $= \frac{E(I)}{E(Z)}$
 $\rho = 1 - e^{-\lambda E(I)}$

Είναι $E(I) =$ μέση τιμή υπολειπόμενου χρόνου για αφίξη πελάτη
 σε σύγγες που αδειάζει το σύστημα
 $\frac{\text{αμνημι}}{\text{ιδιοτιτα}} = \frac{1}{\lambda}$

Έτσι $1 - \rho = \frac{1}{E(Z)} \Rightarrow E(Z) = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$

Όμως $E(Z) = E(I) + E(Y) \Rightarrow E(Y) = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1 - 1 + \rho}{1 - \rho} \right) = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$

$$X_{\text{pov.}} \sim \exp(\mu)$$

$$F_S(x)$$

$$F_S(x) = P(S \leq x) = \sum_{j=0}^{\infty} P(S \leq x | Q^- = j) P(Q^- = j)$$

$$\stackrel{\text{past } \alpha}{=} \sum_{j=0}^{\infty} p_j \cdot P(S \leq x | Q^- = j)$$

$$p_j = (1-\rho)e^j$$

$$S | Q^- = j \sim \Gamma(j+1, \mu)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1-\rho)e^j \int_0^x \frac{\mu^{j+1}}{\Gamma(j+1)} t^j e^{-\mu t} dt$$

$$= \int_0^x (1-\rho) e^{-\mu t} \mu \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^j}{j!} \right) dt = \int_0^x (1-\rho) e^{-\mu t} \mu e^{\mu t} dt =$$

$$P(S \leq x) = \int_0^x (1-\rho)\mu e^{-\mu(1-\rho)t} dt$$

$$S \sim \exp((1-\rho)\mu)$$

$$E(S) = \frac{1}{(1-\rho)\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad \left(\rho < 1, \quad \frac{\lambda}{\mu} < 1 \right)$$

$$P(S > \alpha E(S)) = e^{-\alpha}$$

Δείξαμε ότι $S \sim \exp(\mu(1-p))$

$$\tilde{F}_S(s) = \frac{\mu(1-p)}{\mu(1-p) + s}$$

Είναι $S = \overset{\leftarrow \text{χρόνος στην ουρά}}{W} + \overset{\leftarrow \text{χρόνος εξυπηρέτησης}}{X}$

$$X \sim \exp(\mu) \Rightarrow \tilde{F}_X(s) = \frac{\mu}{\mu + s}$$

$$\tilde{F}_S(s) = \tilde{F}_W(s) \cdot \tilde{F}_X(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{F}_W(s) = \frac{\frac{\mu(1-p)}{\mu(1-p) + s}}{\frac{\mu}{\mu + s}} = \frac{(1-p)(\mu + s)}{\mu(1-p) + s} = (1-p) \cdot 1 + p \frac{\mu(1-p)}{\mu(1-p) + s}$$

Αρα W είναι 0 με πιθανότητα $1-p$ και $\exp(\mu(1-p))$ με πιθανότητα p

$$P(W > t) = p e^{-\mu(1-p)t}, \quad t \geq 0$$

$$W/W > 0 \sim \exp(\mu(1-p))$$