Χαρακτηρισμός Ευστάθειας

b μέσος χρόνος εξυπηρέτησης
λ. ρυθμός άφιξης.

ρυθμός (ένταση) συνωστισμού $\rho = \lambda \cdot b$

Εκφράζει την ποσότητα "δουλειάς" που φτάνει στη μονάδα του χρόνου ή αναμενόμενος # αφίξεων κατά τη διάρκεια ενός κύκλου εξυπηρέτησης.

Ο υπηρέτης μπορεί να διεκπεραιώσει 1 μονάδα δουλειάς ανά μονάδα χρόνου, άρα εάν έχω c υπηρέτες, είναι λογικό να έχουμε ως συνθήκη ευστάθειας $\rho < c$

Θεώρημα 8.1 (Χαρακτηρισμός ευστάθειας) *Στο G/G/c σύστημα με απεριοδική (π.χ. συνεχή ή μεικτή) κατανομή για τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων και/ή τους χρόνους εξυπηρέτησης ισχύει ένα ακριβώς από τα παρακάτω:*

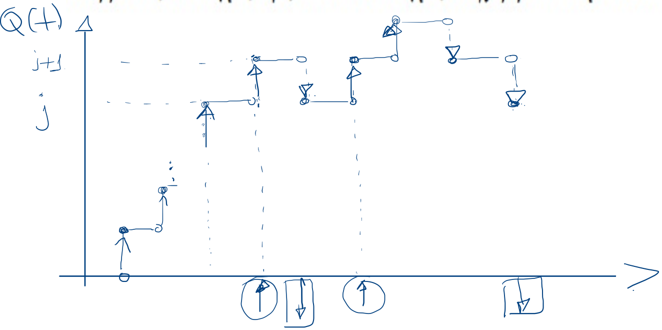
$\boxed{c=1}$ $\boxed{\rho < 1}$ $\boxed{\lambda \cdot b < 1}$

1. *$\rho < c$ οπότε το σύστημα είναι ευσταθές, δηλαδή υπάρχουν οι κατανομές ισορροπίας (p_j), (a_j) και (d_j) και είναι $p_j > 0,\ \ j \geq 0,$ και $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ (και όμοια για τις (a_j) και (d_j)).*

2. *$\rho \geq c$ οπότε το σύστημα είναι ασταθές, δηλαδή το πλήθος των πελατών απειρίζεται καθώς $t \to \infty$ και $p_j = a_j = d_j = 0,\ \ j \geq 0.$*

Σχόλιο: Γενικά για $\rho = c$ το σύστημα ασταθές (έχω μέση κατάσταση c αλλά ∃ διαστήματα που βγαίνω εκτός ευστ.)
εάν ∃ διάστημα αργίας, χάνεται δυναμικότητα εξυπηρέτησης, δε μπορεί να αναπληρωθεί αργότερα
όμως εάν έχω D|D|c, $\rho = c$, το σύστημα είναι ευσταθές

Θεώρημα 8.2 (Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων) *Σε συστήματα εξυπηρέτησης στα οποία οι πελάτες έρχονται και αναχωρούν μεμονωμένα, δηλαδή δεν υπάρχουν ομαδικές αφίξεις, ούτε ομαδικές αναχωρήσεις, οι κατανομές ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων και σε στιγμές αναχωρήσεων συμπίπτουν: $(a_j) = (d_j)$.*



$A_j(t) = \#$ αφίξεων στο $(0,t]$ που βρίσκουν j πελάτες στο Σ

$A(t) = \#$ αφίξεων στο $(0,t]$

$D_j(t) = \#$ αναχωρήσεων στο $(0,t]$ που αφήνουν j πελάτες στο Σ

$D(t) = \#$ αναχωρήσεων στο $(0,t]$

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)} \qquad d_j = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)}$$

Λόγω υπόθεσης ευστάθειας $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{t}$

Ανάμεσα σε 2 αφίξεις που βρίσκουν j πελάτες $\exists$ ακριβώς 1 αναχώρηση που αφήνει j πελάτες

" " αναχωρ. αφήνουν j πελάτες " " 1 άφιξη που βρίσκει j πελάτες

$|A_j(t) - D_j(t)| < 1$ $\quad \left(A_j(t) = D_j(t) + d, \; d \in \{-1,0,1\}\right)$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_j(t) - D_j(t)}{t} = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{A_j(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{D_j(t)}{t}$$

$$a_j = \lim_{t\to\infty}\frac{A_j(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{A_j(t)}{t}}{\frac{A(t)}{t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{D_j(t)}{t}}{\frac{D(t)}{t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{D_j(t)}{D(t)} = d_j$$

Λ. ευστάθεια

$(A(t) = D(t) + D \quad , D < \infty)$

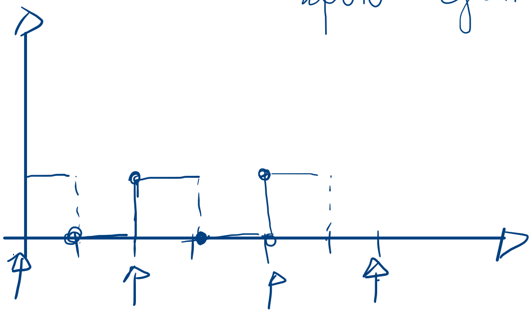
Γενικά $a_n \neq p_n$;

$$\rho = \overset{\text{ρυθμός αφ}}{\lambda} \cdot b \leftarrow \text{μέσος χρ. εξυπ.}$$

$$\rho = \frac{1}{2} < 1$$

D/D/1 αφίξεις κάθε 2 χρονικές μονάδες

χρόνο εξυπηρέτησης 1 χρονική μονάδα



$$a_n = d_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} 1/2 & n = 0 \\ 1/2 & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

Πόρισμα 8.1 (Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων + PASTA) *Σε συστήματα εξυπηρέτησης με μεμονωμένες μεταβάσεις (αφίξεις, αναχωρήσεις) και Poisson διαδικασία αφίξεων όλες οι κατανομές ισορροπίας του πλήθους των πελατών συμπίπτουν:* $(p_j) = (a_j) = (d_j)$.

Θεώρημα 8.3 (Ιδιότητα PASTA (Poisson-Arrivals-See-Time-Averages)) *Σε συστήματα εξυπηρέτησης στα οποία οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson (δηλαδή οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι με εκθετική κατανομή), οι κατανομές ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων και σε συνεχή χρόνο συμπίπτουν:* $(a_j) = (p_j)$.

Σκέψη:

Η διαδικασία Poisson μοντελοποιεί τυχαίες αφίξεις

Παρατηρώ τον # πελατών στο σύστημα σε στιγμές άφιξης είναι ισοδύναμο

Παρατηρώ τον # " " σε τυχαίες χρον. στιγμές σε συνεχή χρόνο

Μαθηματική αιτιολόγηση: $A(t, t+h) = \#$ αφίξεων στο $(t, t+h]$

$p_j = \lim\limits_{t\to\infty} P(Q(t)=j)$ $a_j = \lim\limits_{t\to\infty} P(Q(t)=j \,/$ μια άφιξη συνέβη ακριβώς μετά το $t)$. στ

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} P(Q(t)=j \,/\, A(t,t+h)>0)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{P(Q(t)=j,\ A(t,t+h)>0)}{P(A(t,t+h)>0)} = \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{P(A(t,t+h)>0 / Q(t)=j)\,P(Q(t)=j)}{P(A(t,t+h)>0)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{P(A(t,\cancel{t+h})>0)\,P(Q(t)=j)}{P(A(\cancel{t,t+h})>0)} = \lim_{t\to\infty} P(Q(t)=j) = p_j$$

Θεώρημα 8.5 (Νόμος του Little) *Έστω ένα σύστημα εξυπηρέτησης με αναγεννητική διαδικασία αριθμού πελατών στο σύστημα* $\{Q(t) : t \geq 0\}$, *με σημεία αναγέννησης τις στιγμές που φθάνουν πελάτες σε κενό σύστημα. Έστω, επίσης,* $\{A(t) : t \geq 0\}$ *η διαδικασία των αφίξεων πελατών του συστήματος και* $\{S_n : n \geq 1\}$ *η ακολουθία των χρόνων παραμονής των πελατών. Θέτουμε*

$$E[Q] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t}, \ \lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t}, \ E[S] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n} \tag{8.11}$$

το μέσο πλήθος πελατών, τον ρυθμό αφίξεων και τον μέσο χρόνο παραμονής πελάτη στο σύστημα, αντίστοιχα. Τότε:

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{8.12}$$

S τμ. $F_S(x) = P(S \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(S_n \leq x)$

μεσος χρονος αποφοιτησης $E(S) = 5$ έτη

εισερχονται ∀ χρονο 200 φοιτητές $\lambda = 200/1$

Αναμενόμενος # φοιτητών αυτή τη χρονιά $E(Q) = 1000$

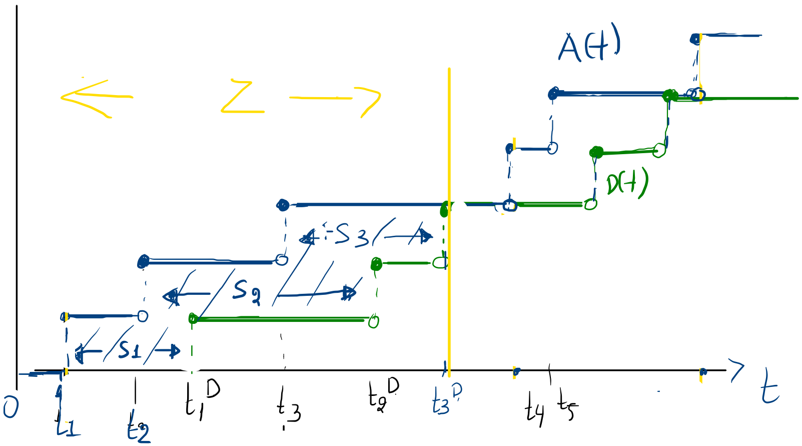
Μια πραγματωση της G/G/1 για FIFO FCFS

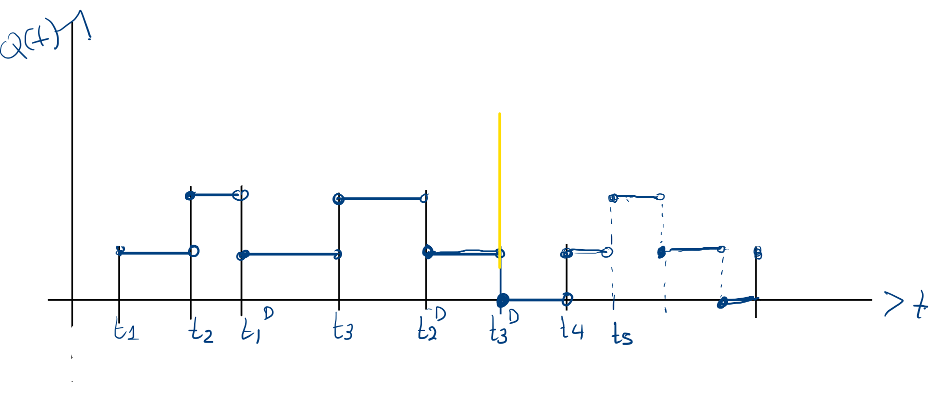
$\{X_n, n \geq 1\}$ ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων

$A(t) = \#$ αφίξεων στο $(0,t]$

$D(t) = \#$ αναχωρήσεων στο $(0,t]$

$Q(t) = A(t) - D(t) = \#$ πελατών τη χρ. στιγμή t





Απόδειξη

$$E(Q) = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t} \overset{\text{αναγ.}}{=} \frac{E\left(\int_0^Z Q(u)du\right)}{E(Z)}$$

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \frac{E(A(Z))}{E(Z)}$$

$$E(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} S_k}{n} = \frac{E\left(\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right)}{E(A(Z))}$$

$$Q(u) = \sum_{k=1}^{A(Z)} I_k(u) \qquad I_k(u) = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } k\text{-πελάτης είναι στο } \Sigma \text{ τη χρ. } u \\ 0 \end{cases}$$

$$k = 1, \ldots, A(Z) \qquad u \in (0, Z]$$

$$\underset{\text{(ολ. Riemann)}}{\int_0^Z Q(u)du} = \int_0^Z \sum_{k=1}^{A(Z)} I_k(u)\,du = \sum_{k=1}^{A(Z)} \underbrace{\int_0^Z I_k(u)\,du}_{S_k} = \sum_{k=1}^{A(Z)} S_k \quad \text{(ολ. Lebesgue)}$$

$$E(Q) = \frac{E\left(\int_0^Z Q(u)du\right)}{E(Z)} = \frac{E\left(\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right)}{E(Z)} = \frac{E\left(\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right)}{E(A(Z))} \frac{E(A(Z))}{E(Z)} = E(S)\cdot\lambda$$

ΠΧ. Εφαρμογή σε πεπερ. χρόνο

Ενα SM ανοίγει 7 πμ, κλείνει 11 μμ. Ο πελάτες στην εναρξη. Ο πελάτες στο κλείσιμο

(E(Q)) $\bar{Q}$: μεσος # πελατών στο κατάστημα για χρ στιγμή μέσα στην ημερ. διάρκεια λειτουργίας

(E(S)) $\bar{S}$: μεσος χρόνος παραμονής πελάτη στο SM την ημέρα

Οι πελάτες έχουν μέσο ρυθμό αφιξης = λ πελάτες/ώρα μεσα σε ημ. διαρκ. λειτ.

Εαν βάλουμε ενα ανιχνευτή σε καθε καρότσι, να καταγράφει την ώρα που το παίρνει ενας πελάτης τη στιγμή που εισέρχεται στο SM και την ώρα που το αφήνει πληρώνοντας στο ταμείο, βγαίνοντας, έχουμε το χρόνο παραμονής του S_i

Στο ταμείο ξέρουμε πόσοι πελάτες ήρθαν συνολικά στη διάρκεια μιας μερας (N)

οπότε $\frac{\sum^{N} s_i}{N} = \bar{S}$

Αν στο ταμείο καταγράφεται το πόσοι έχουν πάρει καρότσι, πόσοι το έχουν αφήσει μπορουμε να ξέρουμε καθε στιγμή πόσοι πελάτες βρίσκονται στο SM

Εαν διαιρέσουμε το N με το 16 (23 − 7 = 16) παίρνουμε το λ

Απο Νομο Little παίρνω $\bar{Q} = \lambda \cdot \bar{S}$

Εφαρμογές του νόμου του Little

- Στο χώρο αναμονής $E(Q_q) = \lambda \cdot E(W)$

- Στο χώρο εξυπηρέτησης $E(Q_s) = \lambda_s \cdot E(X)$

Εαν έχω άπειρη servers (υπηρέτες) $E(W) = 0$ $E(Q_q) = 0$

$E(Q) = E(Q_s)$

$\lambda \cdot E(S)$ $\lambda_s E(X)$ $\lambda = \lambda_s$

$E(S) = E(X)$

$E(Q) = \lambda \cdot E(X) = \rho$

Εαν έχω $GI/G/1$

$E(Q_s) = \lambda_s b = \lambda \cdot b = \rho$ (1)

εαν $\rho < 1$ (ευστάθεια) $\lambda_s = \lambda$

$\left(\rho = 1 \quad \lambda_s = \frac{1}{b} \quad E(Q_s) = 1 = \rho\right)$

$E(Q_s) = 1 \cdot P(Q_s = 1) + 0 \cdot P(Q_s = 0) = P(Q_s = 1) = P(Q \geq 1) = 1 - p_0$ (2)

a_j

d_j

$p_j = P(Q = j)$

$\rho = 1 - p_0$ ή $\boxed{p_0 = 1 - \rho}$

Εαν έχω $GI/G/c$

$E(Q_s) = \lambda_s \cdot b \overset{\rho<c}{=} \lambda \cdot b = \rho$

$E(Q_s) = E\left(\sum_{i=1}^{c} I_i\right)$ $\quad I_i = \begin{cases} 1 & \text{ο } i \text{ υπηρέτης απασχ} \\ 0 & \text{'' '' άδειος} \end{cases}$

$= \sum_{i=1}^{c} E(I_i) \overset{\text{εαν } E(I_i) = E(I_1)}{=\!=} c \cdot E(I_1) = c \cdot P(\text{ο } i \text{ υπηρέτης απασχολ})$

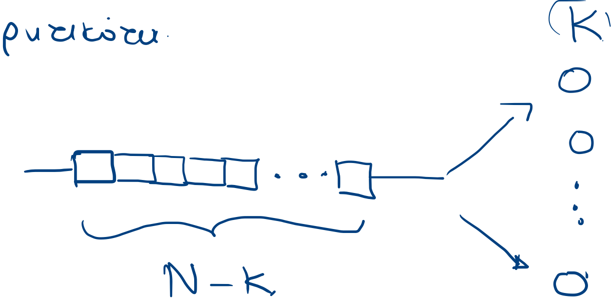
$c \cdot P(\text{ο } i \text{ υπηρέτης απασχ.}) = \rho$ ή $P(\text{ο } i \text{ υπηρ. απασχ}) = \frac{\rho}{c}$

Εκφ. μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που που είναι απασχολημένοι οι υπηρ.

$\not\to$ συν. χωρητικότητα

• $GI / G / K / N$

Έστω το λ τόσο μεγάλο που όλες οι θέσεις καλύπτονται



N. Little στο χώρο εξυπηρέτησης

$$E(Q_s) = \lambda_s \cdot b = K$$

$$\lambda_s = \frac{K}{b} \underset{\text{ευστ.}}{=} \lambda$$

N. Little στο σύστημα

$$E(Q) = \lambda \cdot E(S)$$

$$N = \lambda \cdot E(S) \Rightarrow E(S) = \frac{N}{\lambda}$$

$$E(S) = \frac{N}{K} \cdot b$$