Εισαγωγή στις Ουρές Αναμονής

Παραδείγματα όπου οι ουρές είναι σημαντικές, και κάποια ερωτήματα:

1) SuperMarket
- Πόση ώρα πρέπει να περιμένουν οι πελάτες στα ταμία;
- Πως αυτός ο χρόνος μεταβάλλεται στις ώρες αιχμής;
- Υπάρχουν αρκετά ταμία;

2) Σύστημα Παραγωγής : Μια μηχανή παράγει διάφορα προϊόντα.
- Πόσος είναι ο χρόνος παράδοσης μιας παραγγελίας
- Πως αυτός ο χρόνος μεταβάλλεται εαν έχουμε μια δεύτερη μηχανή
- Θα έπρεπε να ορίσουμε "προτεραιότητα" σε κάποιες παραγγελίες

3) Μετάδοση δεδομένων : Στα δίκτυα επικοινωνίας υπολογιστών όπως το Internet, πακέτα δεδομένων μεταδίδονται μέσω συνδέσεων από ένα μεταγωγέα (switch) στον επόμενο. Σε κάθε switch τα εισερχόμενα πακέτα μπαίνουν σε μια προσωρινή αποθήκη (buffer), όταν η εισερχόμενη ζήτηση ξεπερνά τη χωρητικότητα της σύνδεσης. Όταν το buffer γεμίσει, εισερχόμενα πακέτα θα χαθούν
- Πόσος είναι ο χρόνος καθυστέρησης του πακέτου στα switch
- Ποιο ποσοστό πακέτων χάνεται;
- Ποιο είναι το "καλό" μέγεθος ενός buffer.

4) Χώρος στάθμευσης, σ' ένα super market
- Πόση χωρητικότητας;

5) Τηλεφωνικό κέντρο σε μια ασφαλιστική εταιρία,
- Πόσος ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη, μέχρι να υπάρχει ελεύθερος εκπρόσωπος
- Είναι ο αριθμός των εισερχομένων τηλεφωνικών γραμμών αρκετός;
- Υπάρχουν αρκετοί εκπρόσωποι;

6) Σταθμός διοδίων

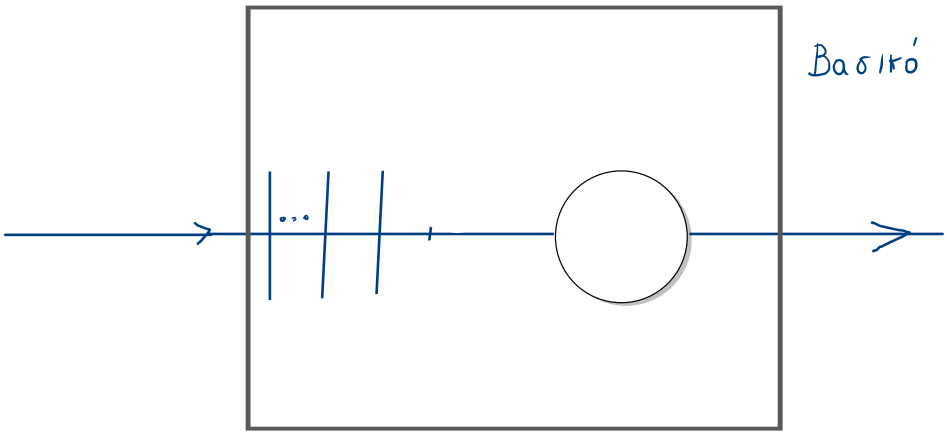
7) Φανάρια κυκλοφορίας

Χρονοπρογραμματισμός τ.ω. ο χρόνος αναμονής να είναι "αποδεκτός"

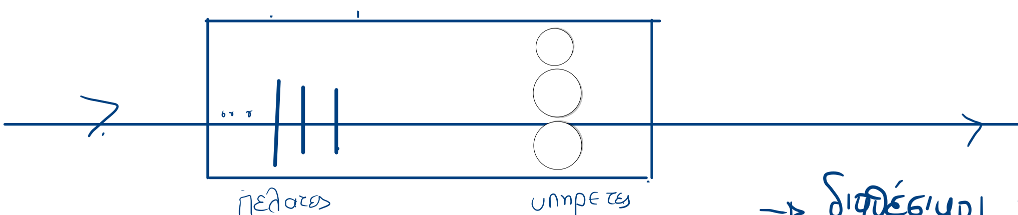
8) Μονάδα επειγόντων περιστατικών σ' ένα νοσοκομείο:
- Αριθμός νοσηλευτών και γιατρών
- ΜΕΘ
- Με ποιο τρόπο επιλέγεται η προτεραιότητα ...

9) Εργασίες στη CPU ενός υπολογιστή

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης ή ουρά αναμονής είναι ένα σύστημα ΕΙΣΟΔΟΥ - ΕΞΟΔΟΥ διακριτών οντοτήτων (μονάδων/πελατών) στο οποίο υπεισέρχεται τυχαιότητα.



Βασικό μοντέλο ουράς



→ διαθέσιμοι πόροι
πχ χωρητικότητα, Ταμίες

πχ τηλεφωνήματα
μηνύματα
αυτοκίνητα.

* μπορεί να έχω περισσότερες

Εμείς θα μελετήσουμε συστήματα αναγεννητικά:

Το σύστημα αναγεννάται όταν φτάνει ένας πελάτης που βρίσκει κενό το σύστημα.

Ξεκινάει ένας νέος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων και ένας χρόνος εξυπηρέτησης

Βασικά χαρακτηριστικά ⟶ Ονοματολογία Kendall (1953)

A – Η διαδικασία αφίξεων (arrival process) : ενδιάμεσοι χρόνοι, άφιξη ομάδων

B – Οι χρόνοι εξυπηρέτησης (service times) : είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι, είναι ανεξάρτητοι από τους ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων.

c – Ο αριθμός των (παράλληλων) παρόχων εξυπηρέτησης - υπηρετών (number of servers)
– Ο αριθμών των ουρών (εμείς : 1)

K – Η χωρητικότητα του συστήματος (system capacity) : αριθμός θέσεων αναμονής + εξυπηρέτησης

( ) – Η πειθαρχία ουράς ...

– Συμπεριφορά πελατών : δέχονται να περιμένουν; πόσο χρόνο – ίσως φεύγουν, ξαναέρχονται.

(Χρόνος διακριτός / συνεχής)

A / B / c / K ( )

Αναλυτικότερα:

A (διαδικασία αφίξεων) και B (διαδικασία εξυπηρέτησης)

Τυχαίο κλπ.

GI
General Independent
A ανανεωτική διαδικασία αφίξεων
Γενικοί, Ανεξάρτητοι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων.
Ανεξάρτητοι και ισόνομοι χρόνοι εξυπηρέτησης

/G

M
Memoryless
Markovian
Poisson διαδικασία αφίξεων.
Εκθετικοί, ανεξάρτητοι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων.
Εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης

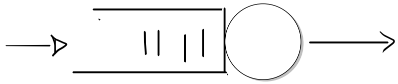
D
Deterministic
σταθερός χρόνος ανάμεσα στα γεγονότα.

K ; αν $K=\infty$ παραλείπεται.

Εαν το K πεπερασμένο και το σύστημα φτάσει στο μέγιστο της χωρητικότητάς του, όταν έρθει νέος πελάτης, απορρίπτεται (ίσως επανέλθει → εμείς όμως θα το θεωρούμε χαμένο)

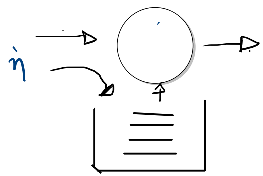
Πειθαρχία ουράς

FCFS First Come First Served (ή FIFO First In First Out) για 1 υπηρέτη)

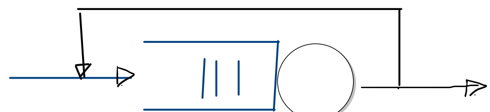


(παραλείπεται στο συμβολισμό)

LCFS Last Come First Served (ή LIFO Last In First Out.)



RR Round Robin



(processor sharing)

(όλοι εξυπηρετούνται από κάποιο "μέρος χρόνου"

SIRO Service In Random Order

SSTF Shortest Service Time First (. . . άλλη προτεραιότητα.)

PS Processor sharing (όταν ∃ n πελάτες, ο υπηρέτης δίνει 1/n του χρόνου του στον καθένα.

πχ $M/M/1$: Poisson διαδικασία αφίξεων, Εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης και 1 υπηρέτη, άπειρη χωρητικότητα, πειθαρχία ουράς FCFS

Μπορεί να μας δίνεται ρυθμός αφίξεων $\lambda = \frac{1}{a}$, ρυθμός εξυπηρέτησης $\mu = \frac{1}{b}$

Μέτρα απόδοσης Συστήματος

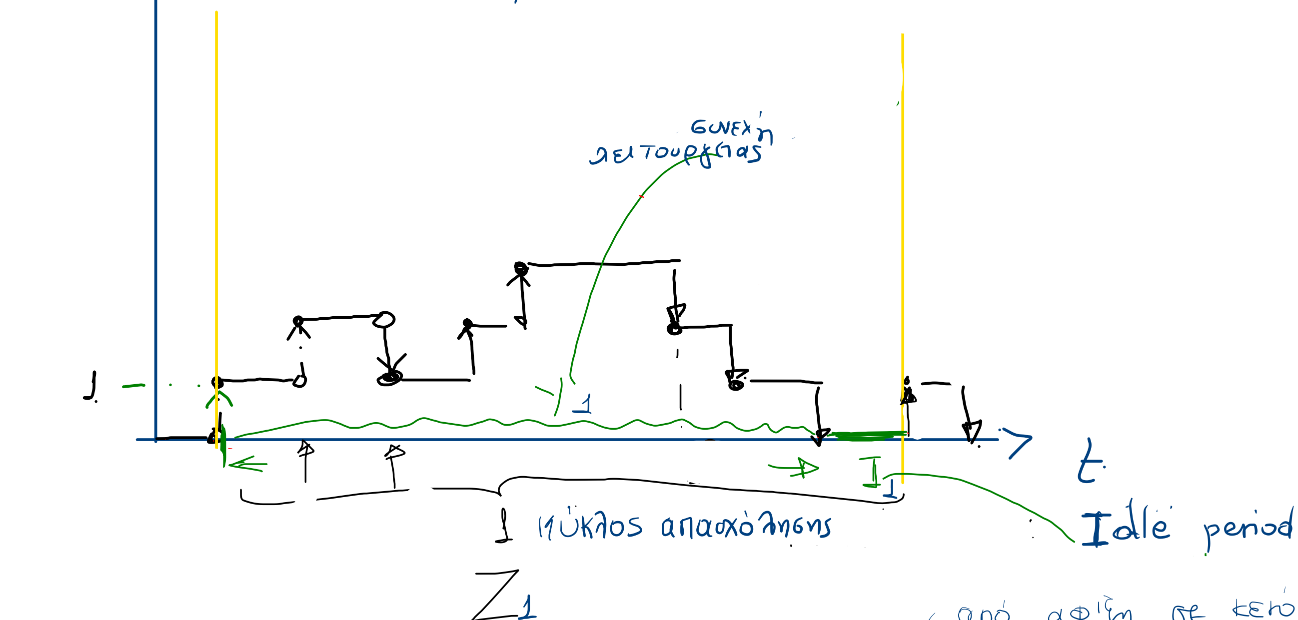
Τυπικά ερωτήματα που απασχολούν τη Θεωρία Ουρών Αναμονής
(από τη πλευρά του διαχειριστή ή από τη πλευρά του πελάτη
ή από τη πλευρά του υπηρέτη)

① Πόσοι πελάτες θα βρίσκονται στο σύστημα κατά μέσο όρο μια τυχούσα χρονική στιγμή (είτε μετράω μόνο αυτούς στην ουρά είτε και αυτούς που εξυπηρετούνται) (κατανομή # πελατών στο σύστημα)

② Πόσο χρόνο θα περάσει στο σύστημα κατά μέσο όρο ένας πελάτης
(Χρόνος αναμονής + Χρόνος εξυπηρέτησης)

③ Ποιο ποσοστό του χρόνου του θα βρίσκεται απασχολημένος ένας υπηρέτης που δουλεύει σ' ένα συγκεκριμένο σύστημα;

$\{Q(t), t \geq 0\}$ αναγεννητική διαδικασία αφού το σύστημα εξυπηρέτησης αναγεννάται στοχαστικά στις χρ. στιγμές άφιξης πελάτη που βρίσκει το σύστημα κενό



Z_n: ο χρόνος του n-οστού κύκλου λειτουργίας (από άφιξη σε κενό σε άφιξη σε εκ νέου κενό)

Μας ενδιαφέρει το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που βρίσκονται ακριβώς j πελάτες στο σύστημα (p_j)

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\overbrace{\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}}\,du}^{c(t)}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\text{Συνολικός χρόνος που υπάρχουν ακριβώς } j \text{ πελάτες στο σύστημα στο } (0,t]}{t}$$

πιθ 1.

Εργ. θεώρημα

$$E\left(\int_0^Z 1_{\{Q(u)=j\}}\,du\right) / E(Z) = \frac{\text{Μέσος χρόνος που η } \{Q(t), t\geq 0\} \text{ είναι } j \text{ σε ένα κύκλο}}{\text{Μέση διάρκεια του κύκλου}}$$

$$\left(= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left(\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}}\,du\right)}{t} \right) \qquad \lim \frac{c(t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t P(Q(u)=j\}\,du}{t} = \lim_{t\to\infty} P(Q(t)=j)$$

οριακή πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς j πελάτες στο σύστημα όταν t μεγαλώνει (απεριοδική κατανομή t)

$U_t \sim U(0,t)$

$$= \lim_{t\to\infty} P(Q(U_t)=j)$$

(επιλέγω τυχαία στιγμή στο $(0,t]$ παρατηρούμε την $Q(u)$ την επιλ. χρονι.

$$= P(Q=j)$$

(Q τμ που εκφράζει τον # πελατών στο σύστημα σε κατ. ισορροπίας

$$E(Q) = \sum_{j=0}^{\infty} j\,P_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)\,du}{t}$$

Μακροπρόθεσμο μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα.

Ορίζω
S_n ο χρόνος παραμονής του n-οστού πελάτη στο Σ
W_n " " " " στην ουρά
B_n " " εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη

$$S_n = W_n + B_n.$$

Ενδιαφερόμαστε για την S_n στην κατάσταση ισορροπίας

$$F_S(x) = P(S \le x) = \lim_{n\to\infty} P(S_n \le x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} P(S_i \le x)}{n}$$

Arrival
$A(t) = \#$ αφίξεων στο $(0,t]$

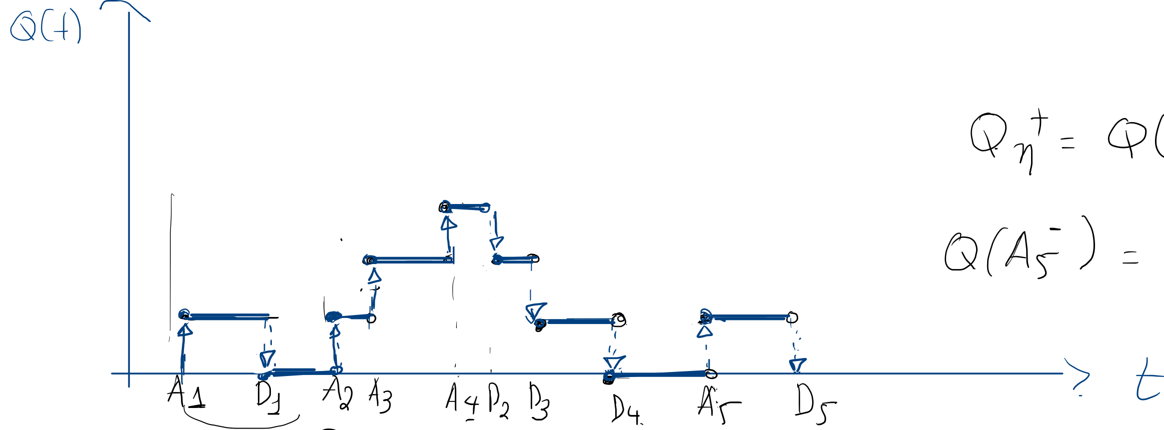
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{E\left(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{S_i \le x\}}\right)}{n} = \frac{E\left(\sum_{i=1}^{A(Z)} 1_{\{S_i \le x\}}\right)}{E(A(Z))}$$

$A(Z) = \#$ πελατών που ήρθαν σ' ένα κύκλο διάρκειας Z)
Z : χρόνος $1^{ου}$ κύκλου $(= Z_1)$

μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που παραμένουν στο σύστημα για χρόνο το πολύ x:

$$E(S) = \frac{E\left(\sum_{i=1}^{A(Z)} S_i\right)}{E(A(Z))} \overset{(\text{με πιθ } 1)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} S_k}_{\text{ΤΜ.}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} E(S_k)}{n} = \lim_{n\to\infty} E(S_n)$$

$$\left(= \int_0^\infty [1 - F_S(x)]\,dx.\right.$$



$Q_\eta^+ = Q(D_3^+) = 1$

$Q(A_5^-) = Q_5^- = 0$

Εμφυτευμένες διαδικασίες σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων.

$A_1 < A_2 < A_3 < \dots$ οι διαδοχικές στιγμές άφιξης πελατών

$D_1 < D_2 < D_3 < \dots$ " " αναχώρησης πελάτη

$Q_\eta^- = Q(A_\eta^-) = \#$ πελατών που βρίσκει στο σύστημα πριν την άφιξη του η-οστού πελάτη

$Q_\eta^+ = Q(D_\eta^+) = \#$ " που αφήνει πίσω στο σύστημα μετά τη η-οστή αναχώρηση πελάτη μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών μπαίνουν βρίσκουν j πελάτες

$$a_j = \lim_{n\to\infty} P(Q_n^- = j) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1\{Q_k^- = j\}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{E\left(\sum_{k=1}^{n} 1\{Q_k^- = j\}\right)}{n}$$

$$= \frac{E\left(\sum_{k=1}^{A(Z)} 1\{Q_k^- = j\}\right)}{E(A(Z))}$$

μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών βγαίνοντας αφήνουν j πελάτες

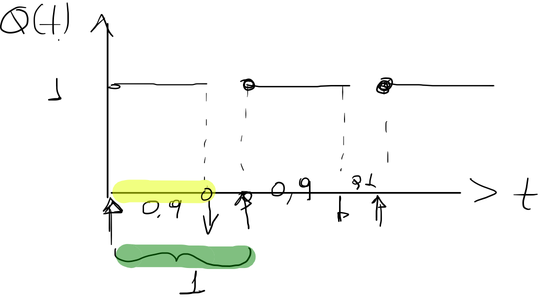
$$d_j = \lim_{n\to\infty} P(Q_n^+ = j) = \frac{E\left(\sum_{k=1}^{A(Z)} 1\{Q_k^+ = j\}\right)}{E(A(Z))}$$

$$P_j = \lim_{n\to\infty} P(Q(t) = j)$$

Ο ~~ενδιάμεσος~~ μέσος χρόνος άφιξεων a, $\lambda = 1/a$ ρυθμός αφίξεων

Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης b. $\frac{1}{b}$ ρυθμός εξυπηρέτησης

πχ $D/D/1$ $a = 1$ $b = 0.9$ a_j, d_j, P_j

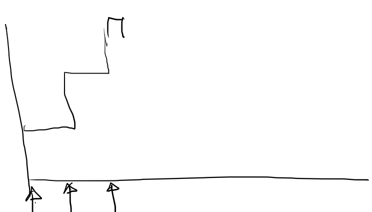


$$P_j = \begin{cases} \frac{0,9}{1} = 0,9 & j = 1 \\ 0,1 & j = 0 \\ 0 & j \geq 2 \end{cases}$$

$$d_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j \geq 1 \end{cases} = a_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j \geq 1 \end{cases}$$

$D|D|1$ $a = 1$ $b = 0,1$ H/W

$D|D|1$ $a = 0.4$ $b = 1$



Πχ

Λεωφορείο έχει N θέσεις. Έρχονται επιβάτες με διαδικασία Poisson (λ)

Μόλις γεμίσει το λεωφορείο αναχωρεί

$Q(t) = \#$ επιβατών στη στάση. $\qquad Q(t) = 0, 1, \ldots, N-1$

$\lim_{t\to\infty} P(Q(t) = j)$

$$P_j = P(Q = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} = \dfrac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{N}{\lambda}} & j = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(Διακριτή ομοιόμορφη στο $\{0, \ldots, N-1\}$)

$\|$

$a_j = P(Q^- = j)$

$$d_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$