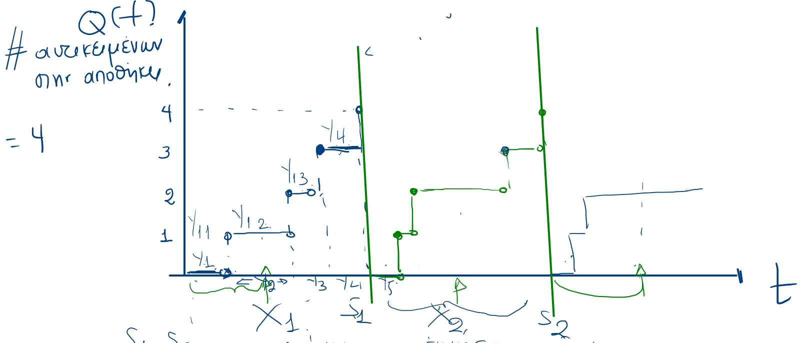
# Εκκαθάριση αποθήκης I

Σε μια αποθήκη φτάνουν αντικείμενα σύμφωνα με μια ανανεωτ. διαδικασία $\{A(t)\}$, $Y_1, Y_2, \ldots$ ενδιάμεσοι χρόνοι, $E(Y) = \mu$.

Μόλις συγκεντρωθούν $m$ προϊόντα, η αποθήκη εκκαθαρίζεται ακαριαία (Τα $m$ προϊόντα διατίθενται σε μικροπωλητές)

$K$: εφάπαξ κόστος ανά επιθεώρηση της αποθήκης, ανεξάρτητο από τον αριθμό των προϊόντων που θα εκκαθαριστούν
$k$: κόστος ανα εκκαθάριση προϊόντος
$h$: " ανα προϊόν και χρ. μονάδα παραμονής του στην αποθήκη

Ποσο είναι : ① ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λειτουργιας της αποθήκης




$m = 4$

$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι αναγέννησης

$S_n$ : n-οστός χρόνος εκκαθάρισης

$Y_1, Y_2, Y_3 \ldots$ διαδοχικοί χρόνοι ανάμεσα στις αφίξεις προϊόντων, ανεξ. ισόνομες τμ. αφού $\{A(t), t \geq 0\}$ αν. διαδ. αφίξεων.

Στον n-οστό κύκλο : $Y_{n,i}$ : ενδιάμεσος χρόνος της $\{A(t)\}$ πριν την άφιξη του i-οστού αντικειμένου

$n = 1 \quad Y_{1,i} \quad i = 1, \ldots, m$

$Y_{n,i} = Y_{(n-1)m+i} \qquad i = 1, \ldots, m$

Το κόστος σ' ένα κύκλο $C_n = K + mk + h \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}$

Διάρκεια ενός κύκλου $= X_n = \sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}$

$(X_n, C_n)$, $n \geq 1$ ανεξ. & ισόνομες τμ $\qquad C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$

$\{C(t), t \geq 0\}$ ανάν. διαδ. κόστου.

ΣΑΘΚ $\qquad \lim_{t \to \infty} \frac{E(C(t))}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}$

$E(C) = K + m \cdot k + h \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} E(Y) = K + mk + h \sum_{i=1}^{m} \mu (m-i)$

$m \qquad \frac{m(m+1)}{2}$

$= K + mK + h\mu \sum_{u=0}^{m-1} u = K + mK + h\mu \frac{(m-1)m}{2}$

$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}\right) = m \cdot \mu$

$\lim_{t \to \infty} \frac{E(C(t))}{t} = \frac{K}{m\mu} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(m-1)}{2} = c(m)$

$$c(m) = \frac{K}{m\mu} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(m-1)}{2}$$

η βέλτιση πολιτική : να βρω κατάλληλο m, που να ελαχιστοποιεί το κόστος

Θα θεωρήσω τη συνεχή επέκταση της $c(\cdot)$ στο $(0,\infty)$

$$c(x) = \frac{K}{x\mu} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(x-1)}{2} \qquad x \in (0,\infty)$$

$$c'(x) = -\frac{K}{x^2\mu} + \frac{h}{2} = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 = \frac{2K}{\mu \cdot h} \quad \text{ή} \quad x^* = \sqrt{\frac{2k}{\mu \cdot h}}$$

( c(x) κυρτή)

$$c''(x) = \frac{2K}{x^3\mu} > 0$$

$$x^* = \sqrt{\frac{2k}{\mu h}}$$ που ελαχιστοποιεί την c(x)

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{2k}{\mu h}} \right\rfloor \quad \text{ή} \quad \left\lceil \sqrt{\frac{2k}{\mu h}} \right\rceil \Leftarrow$$ επιλέγω αυτό που θα μου δώσει το μικρότερο κόστος

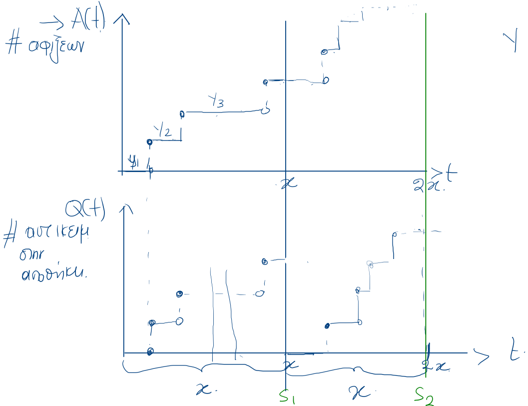
ο μεγαλύτερος ακέραιος $\leq x$    ο μικρότερος ακέραιος $\geq x$

# Εκκαθάριση αποθήκης II

Σε μια αποθήκη φτάνουν αντικείμενα σύμφωνα με διαδικασία Poisson $\{A(t), t \geq 0\}$ με ρυθμό $\lambda$.
Κάθε $x$ χρονικές μονάδες η αποθήκη εκκαθαρίζεται ακαριαία και η παρτίδα πάει σε λιανοπωλητές.

$K$ : εφάπαξ κόστος ανά εκκαθάριση
$k$ : κόστος ανά εκκαθάριση προϊόντος
$h$ : κόστος ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη

1) Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λειτουργίας της αποθήκης;
2) Η τιμή $x$ που τον ελαχιστοποιεί.




$Y \sim \exp(\lambda)$

$\{A(t), t\geq 0\}$ PP$(\lambda)$

$A(t) = \#$ αφίξεων στο $(0,t]$

$S_1 = x$

$S_n = n\cdot x$

Μοντελοποίηση

# αντικειμένων που συσσωρεύτηκαν στο $((n-1)x, nx]$

$C_n$ κόστος σε ένα κύκλο $= K + \kappa\cdot[A(nx) - A((n-1)x)]$

$h\cdot\int_0^x \big(A((n-1)x+u) - A((n-1)x)\big)\,du.$

# αντικ. στην αποθήκη τη χρ. στιγμή $(n-1)x+u$.

$X_n = x.$

$(X_n, C_n)$

$A(nx) - A((n-1)x) \stackrel{d}{=} A(x)$ $\quad$ ($\{A(t), t\geq 0\}$ PP$(\lambda)$ ανεξ. & ομογ. προσαυξήσεις)

$C_n = K + \kappa A(x) + h\int_0^x A(u)\,du.$

$(X_n, C_n)$ $n\geq 1$ ανεξ. & ισόνομες τ.μ.

$\Rightarrow$ ΣΑΘΚ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C(t))}{t} = \frac{E(C)}{E(X)} \qquad E(X) = x$$

$$E(C) = K + \kappa\, E(A(x)) + h\int_0^x E(A(u))\,du = $$
$$= K + \kappa\cdot\lambda\cdot x + h\int_0^x \lambda u\,du = K + \kappa\cdot\lambda\cdot x + \frac{h\lambda x^2}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C(t))}{t} = \frac{K}{x} + \kappa\lambda + \frac{h\lambda x}{2} = c(x) \qquad x\in(0,\infty)$$

$$c'(x) = -\frac{K}{x^2} + \frac{h\lambda}{2} \qquad x = \sqrt{\frac{2K}{h\lambda}} = x^*$$ ελαχιστοποιεί το κόστος

$$c''(x) = \frac{2K}{x^3} > 0$$

$$E(A(x^*)) = \lambda\cdot x^* = \sqrt{\frac{2\lambda K}{h}} \qquad \left[\sqrt{\frac{2K}{\mu h}}\right]$$

Μια άλλη θεώρηση για το $C_n$.

ο χρόνος άφιξης του j-προϊόντος από τα $A_n(x)$ στο n-οστό κύκλο

$$C_n = K + k \cdot A_n(x) + h \sum_{j=1}^{A_n(x)} \left(x - S_{n,j}\right)$$

$A_n(x)$ = # αντικειμένων που έφτασαν στο n-οστό κύκλο σε χρόνο $x$.

$A_n(x)$ $A_1(x)$