Πολιτικές αντικατάστασης

Μια λάμπα / μηχανή / συσκευή / μονάδα λειτουργεί με κατανομή L (χρόνος ζωής)

κάποια αποτυγχάνει / χαλάει : παύει να λειτουργεί

Όταν χαλάσει την αντικαθιστώ με νέα.

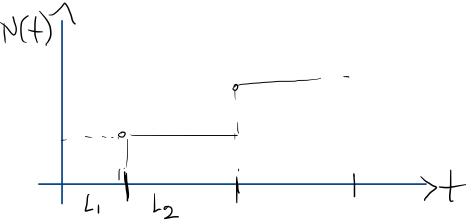
η αντικατάσταση στιγμαίο

$L_1, L_2, L_3 \ldots$ οι διαδ. χρόνοι ζωής $\quad F_L(x) = P(L \leq x)$

$E(L) < \infty$

Πολιτική αντικατάστασης I : λόγω βλάβης

$m_1(t) = E(N_1(t))$



$N_1(t) = \#$ αντικαταστάσεων σε χρόνο $[0,t]$

$L_1, L_2, \ldots$ ενδ. ανεξ & ισον. τμ.

$\{N_1(t), t \geq 0\}$ αναν. διαδικασία

Εφαρμόζω Σ.Α.Θ.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(N_1(t))}{t} = \frac{1}{E(L)}$$

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)\,dF_X$$

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\,dm$$

Β.Α.Θ.

$\lim h(t)$

5 ευρώ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C(t))}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{5 \cdot E(N_1(t))}{t} = \frac{5}{E(L)}$$

$$C(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} 5 = 5 \cdot N_1(t)$$

II. Πολιτική αντικατάστασης λόγω ηλικίας

Οι χρόνοι ζωής έχουν κατανομή $L_1 \sim F_L(\cdot)$

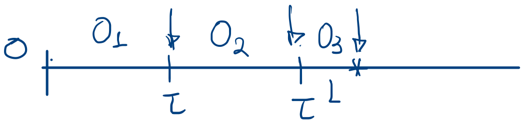
Αντικατάσταση είτε εάν η μονάδα έχει βλάβη, είτε εάν έχει φτάσει μια ηλικία $\tau > 0$, όποιο συμβεί πρώτο.

(η αντικατάσταση είναι στιγμιαία)

$N(t) = \#$ αντικαταστάσεων σε χρόνο $(0,t]$

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι O_1, O_2, O_3 είναι ανεξ. τμ. και ισόνομες. $O_1 = \underbrace{\min\{L_1, \tau\}}$

$\{N(t), t \geq 0\}$ είναι αναν. διαδικασία.



$$E(O) = \int_0^\infty (1 - F_O(u))du.$$

$$F_O(u) = P(O \leq u) = P(\min(L,\tau) \leq u) = \begin{cases} 1 & u \geq \tau \\ P(L \leq u) & u < \tau \end{cases}$$

$$\underbrace{E(O)} = \int_0^\tau (1-F_O(u))du + \int_\tau^\infty (1-F_O(u))du. = \int_0^\tau (1 - F_L(u))du.$$

Από Σ.Α.Θ έχω

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{E(O)} = \frac{1}{\int_0^\tau (1-F_L(u))du} > \frac{1}{\int_0^\infty (1-F_L(u))du} \quad \left(= \lim_{t\to\infty} \frac{E(N_1(t))}{t} \text{ της προηγ. πολιτικής} \right)$$

Άσκηση – Εφαρμογή

χρόνος σε ημέρες

A. Έστω ότι μια μηχανή αντικαθίσταται μόλις χαλάσει. Ο χρόνος ζωής ακολουθεί $U(2,5)$. Να βρεθούν (i) μακροπρόθεσμος ρυθμός αντικαταστάσεων (ii) μακροπρόθεσμος μέσος ρυθ. αντικατ.

$N_1(t)$ # αντικατ. απο $[0,t]$

από πριν

$\{N(t), t \geq 0\}$ αναν. διαδικασία, οι ενδιάμεσοι χρόνοι $L_1, L_2, \dots$ ανεξ. τμ $L \sim U(2,5)$

Από ΣΑΘ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_1(t)}{t} \overset{\text{τμ}}{=} \frac{1}{E(L)} = \frac{2}{7} \text{ με πιθ } 1$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(N_1(t))}{t} = \frac{1}{E(L)} = \frac{2}{7}.$$

$$E(L) = \frac{2+5}{2} = 3,5$$

$U(2,5)$

B. Έστω η μηχανή αντικαθίσταται μόλις περάσουν 3 ημέρες είτε αν χαλάσει (όποιο συμβεί πρώτο)

$N(t)$ # αντικατ απο $(0,t]$

$\{N(t), t \geq 0\}$ αναν. διαδ., οι ενδιάμεσοι χρόνοι $O_1, O_2, \dots$

$$O_1 = \min\{L_1, 3\} \qquad E(O_1) = \int_0^3 (1 - F_{L_1}(u))\,du$$

$$F_{L_1}(u) = \begin{cases} 0 & u < 2 \\ \dfrac{u-2}{5-2} & 2 \leq u < 5 \\ 1 & 5 \leq u \end{cases}$$

$$E(O) = \int_0^2 (1 - F_{L_1}(u))\,du + \int_2^3 (1 - F_{L_1}(u))\,du$$

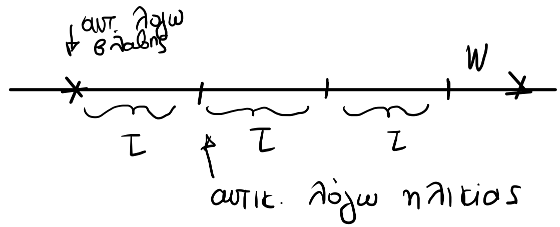
$$= 2 + \int_2^3 \left(1 - \frac{u-2}{3}\right) du = \frac{17}{6}.$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{6}{17} \text{ με πιθ } 1, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{6}{17}.$$

H/W: Έστω $N_2(t) = \#$ αντικαταστάσεων λόγω βλάβης στη πολιτική αντικατάστασης λόγω ηλικίας που περιγράψαμε. Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(N_2(t))}{t} = \frac{F_L(\tau)}{\int_0^{\tau} (1-F_L(u))\,du}$$

Υπόδειξη: Θεωρείστε $Z_1, Z_2, \ldots$ τους χρόνους ανάμεσα στ βλάβες, $Z_i = R_i \cdot \tau + W_i$, $R_i = \#$ μονάδων που αντικαταστάθηκαν λόγω ηλικίας.



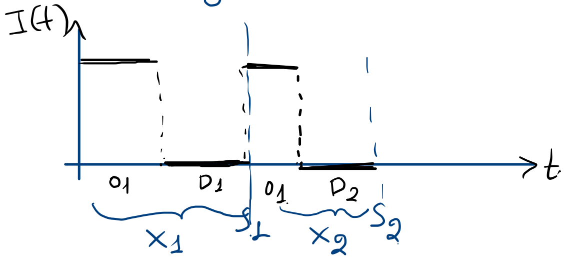
Ας εξετάσουμε το πρόβλημα κόστους στην πολιτική αντικατάστασης λόγω ηλικίας

C_f : κόστος αντικατάστασης λόγω βλάβης (failure cost)

C_p : κόστος προληπτικής αντικατάστασης (preventive cost)

η i αντικατάσταση διαρκεί χρόνο D_i

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{η μονάδα λειτουργεί τη χρον. στιγμή } t \\ 0 & \text{" ΔΕ " "} \end{cases}$$



$\{I(t), t \geq 0\}$ είναι εναλλασσόμενη διαδικασία (αναγεννητική με χρόνους αναγ. $S_1, S_2, \ldots$)

Οι τμ. (O_n, D_n) είναι ανεξ. & ισόνομες, όπου $O_n = \min(L_n, \tau)$ ((L_n, D_n) ανεξ & ισον.)

(D_n, L_n μπορεί να είναι εξαρτημένες πχ $D_n = \begin{cases} d_1 & L_n < \tau \\ d_2 & L_n > \tau \end{cases}$)

Μοντελοποίηση

$$X_n = S_n - S_{n-1} = O_n + D_n = \min(L_n, \tau) + D_n$$

$$c_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = C_f \, 1_{\{L_n \leq \tau\}} + C \, 1_{\{L_n > \tau\}} \qquad n \geq 1$$

(X_n, C_n) ανεξ & ισόνομες, αφού (O_n, D_n) ανεξ & ισόνομες

$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_n$, $\{C(t), t \geq 0\}$ διαδικασία κόστους

για $E(X) < \infty$, $E(C) < \infty$) Εφαρμόζω ΣΑΘ k →

$\{C_1(t), t \geq 0\}$ αν. διαδ. κόστους

Εφαρμόζω Σ.Α.Θ.Κ.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_1(t)}{t} = \frac{E(C)}{E(X)} \quad \text{με πιθ } 1$$

$$C = c_f I_{\{L<\tau\}} + c_p I_{\{L\geq\tau\}}$$

τμ.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C_1(t))}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}$$

$$C = \begin{cases} c_f & L<\tau \\ c_p & L\geq\tau \end{cases}$$

$$E(C) = c_f P(L<\tau) + c_p P(L\geq\tau)$$
$$= c_f F_L(\tau) + c_p(1-F_L(\tau))$$

$$X = \min\{L,\tau\} + D$$

$$E(X) = E(\min(L,\tau)) + E(D)$$
$$= \int_0^\tau (1-F_L(u))\,du + \int_0^\infty (1-F_D(u))\,du$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C_1(t))}{t} = \frac{c_f F_L(\tau) + c_p(1-F_L(\tau))}{\int_0^\tau (1-F_L(u))\,du + \int_0^\infty (1-F_D(u))\,du} = C(\tau)$$

μακροπρόθεσμος
μέσος ρυθμός κόστους

$$C(T) = \frac{C_f F_L(T) + C_p(1 - F_L(T))}{\int_0^T (1 - F_L(u))du + \int_0^\infty (1 - F_0(u))du} = \frac{A(T)}{B(T)}$$

Εαν $T \to 0$ $\qquad \lim_{T \to 0} C(T) = \frac{C_p}{E(D)}$

Εαν $T \to \infty$ $\qquad \lim_{T \to \infty} C(T) = \frac{C_f}{E(L) + E(D)}$

$$A(T) = (C_f - C_p) F_L(T) + C_p$$

<u>Εαν</u> $C_f \leq C_p$ $\quad$ για $\underline{\underline{T_1 < T_2}}$ $\qquad A(T_1) > A(T_2)$

για $T_1 < T_2$ $\qquad B(T_1) < B(T_2)$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \underline{\underline{C(T_1) > C(T_2)}}$$

Εαν $C_p < C_f$ $\qquad$ Δεν ειναι ευκολο

Ας δούμε την ειδική περίπτωση. $L \sim exp(\lambda)$ (αγέραστη μονάδα)

$$C(\tau) = \frac{C_f(1-e^{-\lambda\tau}) + C_p e^{-\lambda\tau}}{\int_0^\tau e^{-\lambda u} du + E(D)} = \frac{C_f(1-e^{-\lambda\tau}) + C_p e^{-\lambda\tau}}{\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda\tau}) + E(D)}$$

$E(D) = 0$

$$C(\tau) = \lambda C_f + \frac{\lambda C_p e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}} = \lambda(C_f - C_p) + \frac{\lambda C_p}{1-e^{-\lambda\tau}}$$

$\tau_1 < \tau_2$ $\quad C(\tau_1) > C(\tau_2)$

$\tau \to \infty$ βέλτιστο

Δε συμφέρει η πολιτική προληπτικής αντικατάστασης αφού η μονάδα είναι πάντα "νέα"

H/W Δοκιμάστε

$L \sim \Gamma(2,1)$ $\quad C_p = 1 \quad C_f = 2$

$L \sim U(0,1)$ $\quad C_p = 4 \quad C_f = 2$