A.

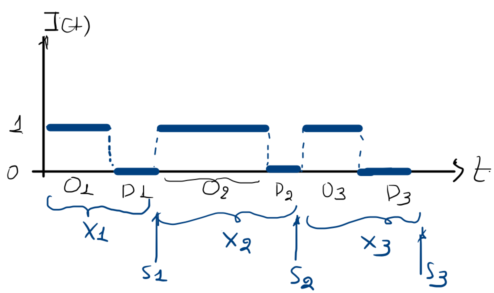
Θυμίζουμε:

Έστω στοχαστική διαδικασία $\{I(t)\}$ η οποία έχει 2 δυνατές καταστάσεις ($\{0,1\}$)
Μπορούμε να θεωρήσουμε μια μηχανή η οποία οποιαδήποτε στιγμή είτε λειτουργεί (1), είτε βρίσκεται σε επισκευή (0)

Έστω $O_1, O_2, \dots$ οι χρόνοι παραμονής στην κατάσταση 1
οι χρόνοι λειτουργίας της μηχανής

$D_1, D_2, \dots$ οι χρόνοι παραμονής στην κατάσταση 0
οι χρόνοι επισκευής (αργία)

Εάν τμ (O_n, D_n), $n \geq 1$ θεωρούνται ανεξάρτητες & ισόνομες, (μη αρν. τμ)
τότε η στοχαστική διαδικασία που περιγράψαμε είναι μια
εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία.



$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{εάν τη χρ. στιγμή } t \text{ είναι καταστ. } 1 \\ 0 & \text{εάν τη χρ. στιγμή } t \text{ είναι καταστ. } 0 \end{cases}$$

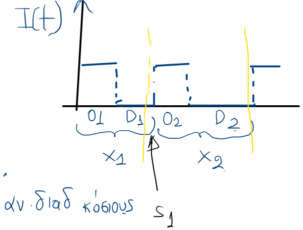
Για $I(t) = \begin{cases} 1 & \text{εαν τη χρ. στιγμή } t \text{ λειτουργία} \\ 0 & \text{'' \quad '' \quad } t \text{ αργία} \end{cases}$

Εχουμε βρεί με αν. συλλογισμό αναvεωτική εξίσωση για : $P(I(t)=1)$ Εφαρμόσαμε ΒΑΘ και πήραμε

$$\lim_{t\to\infty} P(I(t)=1) \underset{X}{\overset{\text{απεριοδ.}}{=}} \frac{E(O)}{E(O)+E(D)} \qquad \left(\begin{matrix} E(O)<\infty \\ E(D)<\infty \end{matrix}\right)$$

Μοντελοποίηση $X_n = O_n + D_n$.

$C_n = \underbrace{O_n} = C(S_n) - C(S_{n-1})$



Επαλήθευση ορισμού

$(X_n, C_n) \quad n \geq 1$

$(X_n, C_n) = (O_n + D_n, O_n)$

(O_n, D_n) ανεξ. & ισον.

$\left\{ \begin{array}{l} (X_n, C_n),\ n \geq 1 \\ \text{ανεξ. \& ισον. τμ.} \end{array} \right.$

$\{C_1(t), t \geq 0\}$ αν. διαδ. κόστους

ΒΑΘΚ.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_1(t)}{t} = \frac{E(C)}{E(X)} = \frac{E(O)}{E(O)+E(D)}$$ με πιθ 1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C_1(t))}{t} = \frac{E(C_1)}{E(X)} = \frac{E(O)}{E(O)+E(D)}$$

$E(C) = E(O)$

$E(X) = E(O) + E(D)$

$$C_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} I(u)du = \int_0^{X_n} I(u)du = O_n$$

$$C(t) = \int_0^t I(u)du.$$

Πήραμε $$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t I(u)du}{t} = \frac{E(O)}{E(O)+E(D)}$$ με πιθ 1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left(\int_0^t I(u)du\right)}{t} = \frac{E(O)}{E(O)+E(D)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t P(I(u)=1)du}{t} = \frac{E(O)}{E(O)+E(D)} \overset{\text{απερ}}{\underset{\text{τουτο}}{=}} \lim_{t\to\infty} P(I(t)=1)$$

πιο ισχυρό

cesaro όριο
c-limit

$g(t)$, εαν $\exists \lim_{t\to\infty} g(t)$ και $\int_0^t g(u)du$ πεπερ $\forall t$, τότε $\exists\ c\text{-}\lim g(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t g(u)du}{t}$

και $c\text{-}\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} g(t)$

Σχόλιο

$\{I(t), t \geq 0\}$ αναγεννητική διαδικασία.

ΕΡΓΟΔΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left(\int_0^t I(u)\,du\right)}{t} = \frac{E(O)}{E(O)+E(D)}$$

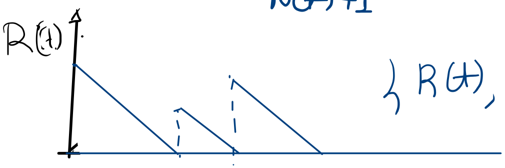
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t I(u)\,du}{t} = \quad \gg \quad \text{με πιθ } 1$$

$$\lim_{t\to\infty} P(I(t)=1) \overset{\text{απερ.}}{=} \frac{E(O)}{E(O)+E(D)}$$

B. Θυμίζουμε:

Έστω $\{N(t), t\geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με χρόνους ανανέωσης $S_1, S_2, \dots$ και ενδιάμεσο χρόνο X, $E(X)=\mu<\infty$, $Var(X)=\sigma^2<\infty$

Για $R(t)=S_{N(t)+1}-t$ υπολοιπόμενος χρόνος ανανέωσης,



$\{R(t), t\geq 0\}$ είναι αναγεννητική διαδικασία

$E(X^2)$ $\quad = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu} > \frac{\mu}{2}$

Σε προηγούμενα μαθήματα, δείξαμε ότι $\lim\limits_{t\to\infty} E(R(t)) = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$ (ανανεωτικό παράδοξο)

(ορ. σκ.)

και $\lim\limits_{t\to\infty} P(R(t)\leq x) = \frac{\int_0^x (1-F_X(u))\,du}{\mu}$

CP: Έχω ανανεωτική διαδικασία κόστους;

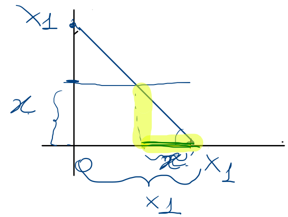
→ $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ $\qquad P(R(t) \le x)$

Για $\quad 1_{\{R(u)\le x\}} = \begin{cases} 1 & R(u)\le x \\ 0 & R(u) > x \end{cases}$

μοντελοποίηση

$$C(t) = \int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}}\, du.$$

συνολικός χρόνος στο $(0,t]$ που η $R(u)$ είναι το πολύ x.



$X > x_1$

Επαλήθευση ορισμού

$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = \int_0^{X_n} 1_{\{R(u)\le x\}}\, du = \min\{X_n, x\}$$

$(X_n, C_n) = (X_n, \min(X_n, x))$ $\quad n \ge 1$ ανεξ. & ισον. τμ

$((X_n, n\ge 1)$ ανεξ. ισον. τμ$)$

$\{C(t), t\ge 0\}$ αναν. διαδ. κόστους.

ΒΑΘ Κ.
$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}}\, du}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}$$ με πιθ 1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C(t))}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}}\, du\right]}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}$$

$$\left(\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t P(R(u)\le x)\, du}{t} \right)$$

C-lim → το $\lim_{t\to\infty} P(R(t)\le x)$ ($\nexists$ μπορεί)

$$E(C) = E(\min(X, x)) = \int_0^x (1 - F_X(u))\, du$$

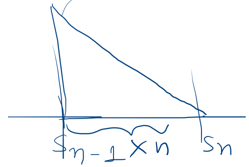
$$E(X) \overset{X\, \theta\varepsilon\tau}{=} \int_0^\infty [1 - F_X(u)]\, du = \mu$$

$E(X) = \mu$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left(\int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}}\, du\right)}{t} = \frac{\int_0^x (1 - F_X(u))\, du}{\mu}$$

Μοντελοποίηση

$$C_1(t) = \int_0^t R(u)\,du$$



Επαλήθευση ορισμού

$$C_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} R(u)\,du = \frac{X_n^2}{2} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} (S_n - u)\,du$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(R(t))}{g(t)}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{E(R(u))\,du}{t}$$

$(X_n, C_n) = \left(X_n, \frac{X_n^2}{2}\right)$ ανεξ. & ισον. Τμ.

άρα $\{C_1(t), t \geq 0\}$ αν. διαδ. κόστους

ΒΑΘΚ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_1(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t R(u)\,du}{t} = \frac{E(C)}{E(X)} \text{ με πιθ. 1}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C_1(t))}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left(\int_0^t R(u)\,du\right)}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}$$

$$E(C) = E\left(\frac{X^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Var}X + E^2(X)\right] = \frac{1}{2}(\mu^2 + \sigma^2)$$

$$E(X) = \mu$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left(\int_0^t R(u)\,du\right)}{t} = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}$$