# Αναγεννητικές διαδικασίες

Διαισθητικά μια αναγεννητική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει "αναγεννητικά σημεία" $\{S_n, n \geq 1\}$, όταν η στοχαστική διαδικασία κατά τον $n$-οστό κύκλο, δηλαδή η $\{X(t), S_{n-1} \leq t < S_n\}$ είναι ίδια $\forall n \geq 1$ και ανεξάρτητη από κύκλο σε κύκλο:

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται Αναγεννητική διαδικασία εάν υπάρχει μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή $S_1$ τω

$P(S_1 = 0) < 1$, $P(S_1 < \infty) = 1$ και $(P(S_1 > 0) > 0)$

(i) $\{X(t), t \geq 0\}$ και $\{X(t+S_1), t \geq 0\}$ να είναι στοχαστικά ισοδύναμες

(ii) $\{X(t+S_1), t \geq 0\}$ ανεξάρτητο απο το $\{X(t), 0 \leq t < S_1\}$. ανεξάρτητες

$((X(t); 0 \leq t < S_1\}$ και $\{X(t), t \geq S_1\}$ ανεξάρτητες )

Από τον ορισμό συνεπάγεται:

Υπάρχει αύξουσα ακολουθία χρόνων $S_1, S_2, \ldots$ τ.ω.

(i) Οι διαδικασίες $\{X(t), t \geq 0\}$ και $\{X(t), t \geq S_n\}$ είναι στοχ. ισοδύναμες

(ii) Οι διαδικασίες $\{X(t), 0 \leq t < S_1\}$, $\{X(t), S_1 \leq t < S_2\}$, $\{X(t), S_2 \leq t < S_3\} \ldots$ είναι ανεξάρτητες

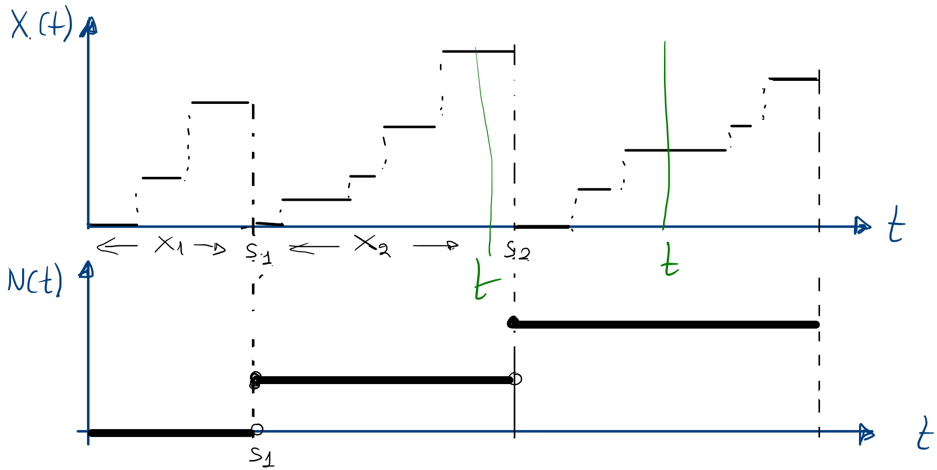
Επομένως οι χρόνοι $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$ $(S_0 = 0)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τμ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $S_n$ χρόνοι γεγονότων μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t), t \geq 0\}$

Η $S_n$ θεωρείται αναγεννητική στιγμή για την $\{X(t), t \geq 0\}$ καθώς η διαδικασία "χάνει" τη μνήμη της αφού $\{X(t), 0 \leq t < S_n\}$ ανεξ. της $\{X(t), t \geq S_n\}$ και ξεκινάει εκ νέου.

$\{X(t), t \geq 0\}$, $\{X(t), t \geq S_n\}$ είναι στοχ. ισοδύναμες

<u>πχ</u>



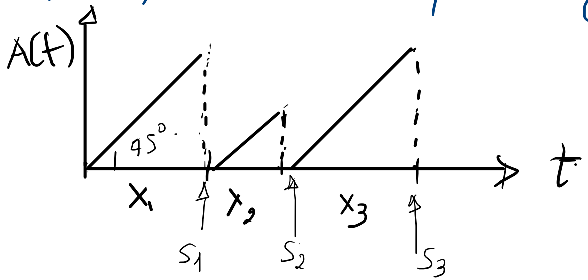

Λέμε ότι η $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ $(\{N(t)\ t \geq 0\})$ είναι η ανανεωτική διαδικασία η εμφυτευμένη στην αναγεννητική

! Εαν έχω $\{N(t), t \geq 0\}$ μια απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία, με χρόνους ανανεωσης $\{S_n, n \geq 0\}$ δεν είναι αναγεννητική

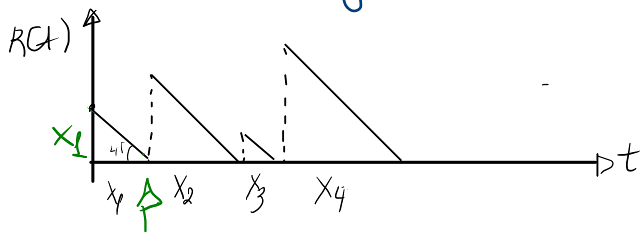
όμως:

Εαν θεωρήσω την ηλικια $A(t) = t - S_{N(t)}$, της ανανεωτικής $\{N(t), t \geq 0\}$

Τοτε η $\{A(t), t \geq 0\}$ είναι μια αναγεννητική διαδικασια




Ομοια, για τον υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης $R(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$,
η $\{R(t), t \geq 0\}$ είναι αναγεννητική διαδικασία




πχ Φτάνω στη στάση τη χρ. στιγμή $t$, Τα λεωφορεία φτάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία

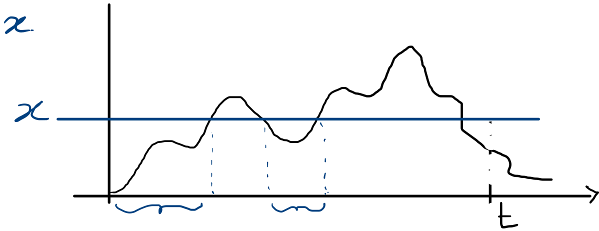
R(t): ο χρόνος που περιμένουμε μέχρι να έρθει το επόμενο λεωφορείο

Έστω $\{X(t), t\geq 0\}$ στοχ. διαδικασία με χώρο καταστάσεων κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. (Δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια)

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: ΟΡΙΑΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ Σ.Κ. ΤΗΣ $\{X(t), t\geq 0\}$ $\underline{\underline{\text{πχ}}}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}}du}{t}, \quad x\in\mathbb{R}$$

Εκφράζει: Το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η $\{X(t), t\geq 0\}$ περνάει σε καταστάσεις μικρότερες ή ίσες του $x$.




ΟΡΙΣΜΟΣ 2: ΟΡΙΑΚΗ ΜΕΣΗ ΔΕΙΓΜ ΣΚ της $\{X(t), t\geq 0\}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left(\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}}du\right)}{t}$$

Εκφράζει: Το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η $\{X(t), t\geq 0\}$ περνάει σε καταστάσεις μικρότερες ή ίσες του $x$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3:

$$F_{X(\infty)}(x) = \lim_{t\to\infty} P(X(t)\leq x), \quad x\in\mathbb{R}$$ οριακή σ.κ. της $\{X(t), t\geq 0\}$

ΕΡΓΟΔΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ για αναγεννητική διαδικασία

Έστω $\{X(t), t\geq 0\}$ αναγ. διαδικασία με χώρο καταστάσεων στο $(-\infty,\infty)$, δεξ. συνεχείς πραγμ. με αρ. όρια. Έστω $S_1$ ο χρόνος της 1ης αναγέννησης και $D_1(x)$, ο χρόνος για τον οποία η διαδικασία $\{X(t), t\geq 0\}$ περνάει στο $(-\infty, x]$ κατά το $(0, S_1)$

Τότε για απεριοδική $S_1$ (απεριοδικότητα στους ενδιάμεσους χρόνους), $E(S)<\infty$ έχουμε

(i) $\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1\{X(u)\leq x\}du}{t} = \frac{E(D_1(x))}{E(S_1)} = \frac{E\left(\int_0^{S_1} 1\{X(u)\leq x\}du\right)}{E(S_1)}$ με πιθ. 1.

(ii) $\lim_{t\to\infty} \frac{E\left(\int_0^t 1\{X(u)\leq x\}du\right)}{t} = \frac{E(D_1(x))}{E(S_1)}$ ? ΣΑΘΚ $C_1(t)$

(iii) $\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t P(X(u)\leq x)\,du}{t} = \frac{E(D_1(x))}{E(S_1)}$

(iv) $F_{X(\infty)}(x) = \lim_{t\to\infty} P(X(t)\leq x) = \frac{E(D_1(x))}{E(S_1)}$ Κατανομή Ισορροπίας της $X(t)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_1(t)}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}$$ με πιθ 1

Εαν ο χωρος κατασταστεων είναι διακριτός

$$P_j = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left(\int_0^t [X(u)=j]\, du\right)}{t}$$

μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό που η διαδικασία περνάει στην κατασταση $j \in \mathbb{N}_0$

$$P_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{[X(u)=j]}\, du}{t}$$

με πιθ 1

μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που η διαδικασια περνάει στην κατ. j

$$P_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t P[X(u)=j]\, du}{t}$$

(Cesaro οριακή πιθανότητα)

$$P_j = \frac{E\left(\int_0^S 1_{[X(u)=j]}\, du\right)}{E(S)} = \frac{\text{Μέσος συνολικός χρόνος παραμονής στην } j \text{ κατα τη διάρκεια του } [0,S]}{\text{Μέσος χρόνος της } S}$$

= Μέση διάρκεια αναγεννητικού κυκλου.

Εαν οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι απεριοδικοί

$$P_j = \lim_{t\to\infty} P(X(t)=j)$$

οριακή πιθανότητα να βρίσκεται η $\{X(t)\}$ στην κατασταση j

# ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\{X(t), t\geq 0\}$ αναγεννητική διαδικασία με χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}$

Έστω, επίσης, άνω ή κάτω φραγμένη συνάρτηση $c(x)$ που εκφράζει το κόστος ανά χρονική μονάδα παραμονής της $\{X(t), t\geq 0\}$ στην κατάσταση $x$ (δηλαδή τον ρυθμό κόστους παραμονής στην κατάσταση $x$) και

$C(t)=\int_0^t c(X(u))\,du$ , $t\geq 0$ συνολικό κόστος που συσσωρεύεται στο $(0,t]$

Έστω ότι $X$ είναι μια τ.μ. με την κατανομή ισορροπίας $F_X(t)$ της $\{X(t)\}$.

(i) Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε

$$\lim_{t\to\infty}\frac{C(t)}{t}=E(c(X)) \quad \text{με πιθανότητα } 1$$

(ii) Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε

$$\lim_{t\to\infty}E\left(\frac{C(t)}{t}\right)=E(c(X))$$

όπου
$$E(c(X))=\frac{E\left(\int_0^S c(X(u))\,du\right)}{E(S)}=\frac{E(C(S))}{E(S)}=\int_{-\infty}^{\infty}c(x)\,dF_X(u)$$

$$=\begin{cases}\sum_x c(x)f_X(x) & X \text{ διακριτή με σ.π } f_X(x)\\ \int_{-\infty}^{\infty}c(x)f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής με σ.π.π. } f_X(x)\end{cases}$$

$S$ ο χρόνος της $1^{ης}$ αναγέννησης της $\{X(t), t\geq 0\}$

Εάν η κατανομή της $S$ είναι απεριοδική, έχουμε $E(c(X))=\lim_{t\to\infty}E(c(X(t)))$