Ανανεωτική διαδικασία κόστους

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με
$S_1, S_2, \ldots$ χρόνους γεγονότων
$X_1, X_2, \ldots$ ενδιάμεσοι χρόνοι, με κατανομή $F_X(t)$
στοχ.
Θεωρούμε $\{C(t), t \geq 0\}$ διαδικασία $\rightarrow$ Διαδικασία κόστους
Cost

Για συγκεκριμένη χρονική στιγμή t,
$C(t)$ τμ που εκφράζει το κόστος που έχει συσσωρευτεί στο $(0,t]$

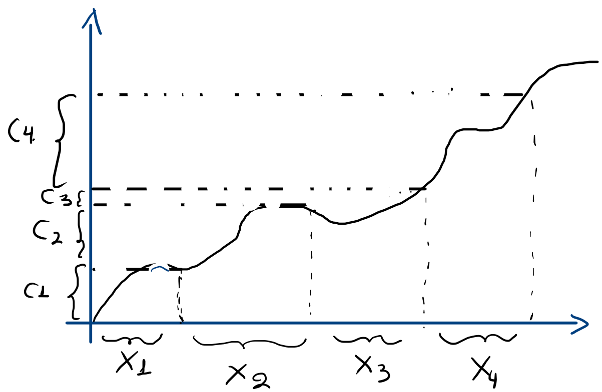
- Μπορεί να μην είναι μονότονη συνάρτηση του t για μια πραγματοποίηση
- Μπορεί να σχετίζεται με τα γεγονότα της $N(t)$
- Μπορεί να συσσωρεύεται με συνεχή τρόπο ή με άλματα τις στιγμές των γεγονότων
- Μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές ($\rightarrow$ αμοιβή Reward) R

Η διαδικασία κόστους $\{C(t), t \geq 0\}$ λέγεται συμβατή με την ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t\geq 0\}$ αν οι διδιάστατες Τμ. (X_n, C_n) με $C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες για $n \geq 1$ με κοινή συνάρτηση κατανομής $F_{X,C}(x,y) = P[X_n \leq x, C_n \leq y]$ = γεννώσα σ.κ της $\{C(t), t\geq 0\}$

Σε αυτή την περίπτωση θα ονομάζεται

ανανεωτική διαδικασία κόστους

Είναι σημαντικό οι C_n, X_n να μπορεί να είναι εξαρτημένες



Υπάρχουν εφαρμογές που η αμοιβή εισπράττεται σταδιακά με τη πάροδο του χρόνου: Μπορεί να συσσωρεύεται με ρυθμό ρ κατά τη διάρκεια του (S_{n-1}, S_n) ή επίσης τμήματος του

$$C(t) = \int_0^t \rho(u)\,du \qquad t \geq 0$$

$$C_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \rho(u)\,du.$$

Παράδειγμα στοχ. διαδικασίας κόστους

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \ldots$ και $Y_1, Y_2, \ldots$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τμ ανεξάρτητων της $\{N(t)\}$ και $g(x, y)$ συνάρτηση τότε

η $\{C(t)\}$ με $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i, Y_i)$, $t \geq 0$ λέγεται αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους

Πράγματι.

$$\underline{\underline{C_n}} = C(S_n) - C(S_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} g(X_i, Y_i) - \sum_{i=1}^{n-1} g(X_i, Y_i) = g(X_n, Y_n) \quad *$$

Έτσι $\underline{\underline{(X_n, C_n)}} = (X_n, g(X_n, Y_n))$ $n \geq 1$ ανεξάρτητες & ισόνομες δηλαδή είναι ανανεωτική διαδικασία κόστους.

"αλματική": Το κόστος συσσωρεύεται με άλματα που συμβαίνουν τις στιγμές των γεγονότων της υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$

* Ερμηνεία:

Το κόστος που έρχεται τη χρ. στιγμή S_n που τελειώνει ο n-οστός ανανεωτικός κύκλος εξαρτάται από τη διάρκεια X_n του ανανεωτικού κύκλου και τυχαίους παράγοντες που εκφράζονται από την τμ Y_n

Εφαρμογή: Μηχάνημα με χρόνους ζωής $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητους & ισόνομους.

Επισκευή σε περίπτωση βλάβης $\longrightarrow$ λειτουργεί στη συνέχεια σαν καινούριο.

$N(t) = \#$ επισκευών στο $(0,t]$

Όσο το μηχάνημα λειτουργεί δεν έχω κόστος.

Όταν χαλάσει έχω κόστος επισκευής που εξαρτάται από τους χρόνους ζωής (X_n) και κάποιο τυχαίο παράγοντα (Y_n) $\quad C_n = g(X_n, Y_n)$

Ειδικές περιπτώσεις για τη g

1) $g(x,y) = c \cdot x$ (κόστος ανάλογο του χρόνου ζωής)

Τότε $\underline{\underline{C(t)}} = \sum_{i=1}^{N(t)} c \cdot X_i = c \cdot \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = \underline{\underline{c \cdot S_{N(t)}}} \leftarrow$

2) $g(x,y) = 1$ (πληρώνω 1 € σε κάθε βλάβη)

Τότε

$$\underline{\underline{C(t)}} = \sum_{i=1}^{N(t)} 1 = \underline{\underline{N(t)}}$$

3) Μια μηχανή που επιθεωρείται τις χρ. στιγμές ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$

σε κάθε επιθεώρηση έχουμε:

- το πάγιο κόστος επιθεώρησης k
- κόστος ανταλλακτικών Y_n (τ.μ.)
- κόστος ενέργειας: c ανά χρονική μονάδα από προηγ. επιθεώρηση

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i, Y_i), \quad g(x,y) = k + y + c \cdot x$$

Εαν $g(x,y) = y$.

$$C(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_j$$ σύνθετη στοχ. διαδικασία.

($X_i \sim exp(\lambda)$ σύνθετη διαδικασία Poisson) πχ Ταξιτζής, κατεβάζει πελάτη τις χρ. στιγμές $S_n, n \geq 1$,

X_n χρόνος εξυπηρέτησης (διαδρομής) του n-οστού πελάτη

Θεωρούμε ότι παίρνει νέο πελάτη, με την αποχώρηση του προηγούμενου

Εδώ (X_n, C_n) είναι ανεξ και ισόνομες. Η αμοιβή C_n από τον n-οστό πελάτη, εξαρτάται ίσως από το χρόνο της διαδρομής X_n αλλά δεν εξαρτάται από άλλα X_i (ή C_i) $i \neq n$. (Η αμοιβή εισπράττεται στο τέλος)

$$C(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} g(X_n, C_n) \quad (t \geq 0)$$

$$C_n = a \cdot x_n + d$$

Έστω $\{C(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία κόστους

κόστος/μοναδ χρονου

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \text{Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Κόστους}$$

τ.μ.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C(t))}{t} = \text{Μακροπρόθεσμος Μέσος Ρυθμός Κόστους}$$

αριθμός

♡ **ΘΕΩΡΗΜΑ** (Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με κόστη) ΣΑΘΚ

Έστω $\{C(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία κόστους με τυπικό ζεύγος διάρκειας ανανεωτικού κύκλου και αντίστοιχης αμοιβής (X, C) με γεννώσα σ.κ $F_{XC}(x,y)$ και έστω $E(X) < \infty$, $E(C) < \infty$

Τότε

(i) $\lim_{t \to \infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}$ με πιθανότητα 1 $\quad P\left(\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}\right) = 1$

(ii) $\lim_{t \to \infty} \frac{E(C(t))}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}$

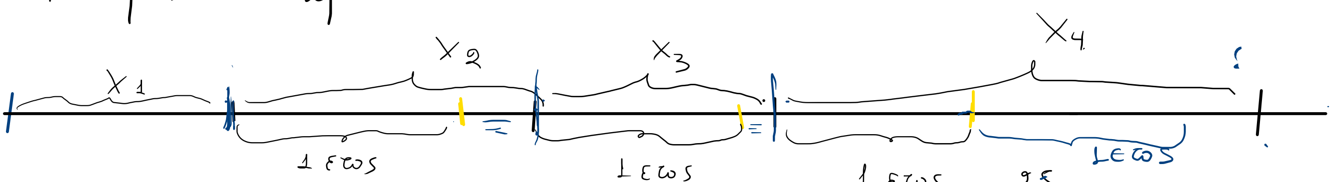
(για $g(x,y) = 1$ $\quad C(t) = N(t)$ $\rightarrow$ Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα)

Σχόλια:

- Η σχέση (ii) μας λέει ότι ο μακροπρόθεσμος μέσος (αναμενόμενος) ρυθμός κόστους είναι ο λόγος του μέσου κόστους σε ένα κύκλο προς την αναμενόμενη διάρκεια του κύκλου
- Το κόστος δε χρειάζεται να είναι ανεξάρτητο από το μήκος του κύκλου

Παράδειγμα

Έστω ότι ένα εστιατόριο έχει ένα φούρνο, τον οποίο τον ελέγχει επιθεωρητής σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία, με ενδιάμεσους χρόνους με κατανομή ομοιόμορφη από 1 έτος σε 2,5 έτη.
Αν βρει ότι δεν έχει γίνει συντήρηση για περισσότερο από ένα έτος, το εστιατόριο πληρώνει πρόστιμο 105€.
Ο εστιάτορας επιλέγει να κάνει συντήρηση ακριβώς 1 έτος μετά την επίσκεψη του επιθεωρητή.
Υπολογίστε το μακροπρόθεσμο ποσό προστίμου που πληρώνει ο εστιάτορας το χρόνο.



$$P(\text{πληρώσει πρόστιμο}) = P(X-1>1) = P(X>2) = \int_2^{2,5} \frac{1}{2,5-1}\,dx = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$$

άρα $E(C_1) = \frac{1}{3}\cdot 105$

και $E(X) = \frac{2,5+1}{2} = \frac{3,5}{2} =$

άρα το μακροπρόθεσμο ποσό προστίμου $= \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 105}{\frac{3,5}{2}} = \dfrac{2\cdot 35}{3,5} = 20$ €