Γενικεύσεις της διαδικασίας Poisson

$\boxed{1}$ Η θεώρηση ότι ο ρυθμός άφιξης είναι σταθερός, δεν είναι ρεαλιστική. Θα προτιμούσαμε αντί για λ, να είχαμε μη αρνητική συνάρτηση $\lambda(t)$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

Η απαριθμήτρια διαδ. $\{N(t), t \geq 0\}$ λέγεται μη ομογενής διαδικασία Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$, $t \geq 0$ εαν

- $N(0) = 0$
- $\{N(t), t \geq 0\}$ ανεξάρτητες προσαυξήσεις
- $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t) \cdot h + o(h) \quad t \geq 0$
- $P(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda(t) h + o(h)$
- $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h) \quad t \geq 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέγεται μη ομογενής διαδ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$, $t \geq 0$ εάν

- $N(0) = 0$
- $\{N(t), t \geq 0\}$ έχει ανεξ. προσαυξήσεις
- $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}\left(\int_s^{t+s} \lambda(u)\, du \right) \quad s \geq 0, \ t \geq 0$

$(\lambda(u) = \lambda \ \forall u \qquad \text{Poisson}(\lambda t))$

Παράδειγμα

Ένα κατάστημα είναι ανοιχτό από τις 10:00 έως τις 16:00. Έστω ότι οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με μια μη ομογενής διαδικασία Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ που περιγράφεται από τον πίνακα.

Διάστημα	ρυθμός
10:00 – 12:00	6
12:00 – 14:00	15
14:00 – 16:00	γραμ. φθίνει από το 15 στο 10

Είναι
$$\lambda(t)=\begin{cases} 0 & 0<t\le 10 \\ 6 & 10<t\le 12 \\ 15 & 12<t\le 14 \\ 15+(t-14)\dfrac{10-15}{16-14} = 15-2.5(t-14) & 14<t\le 16 \\ 0 & 16<t\le 24 \end{cases}$$

Η πιθανότητα να μην ήρθαν πελάτες στο διάστημα 13:00 – 15:0

$$P(N(15)-N(13)=0) = e^{-\int_{13}^{15}\lambda(t)dt} = e^{-\int_{13}^{14}15\,dt-\int_{14}^{15}(15-2.5(t-4))\,dt}$$
$$= e^{-28.75} \approx 0.$$

$\boxed{2}$ Τι συμβαίνει αν ο ρυθμός γεγονότων είναι τμ ;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω: • Λ συνεχής τμ. με σκ G

• $\{N(t), t \geq 0\}$ απαριθμήτρια τω.

$$N(t) / \Lambda = \lambda \sim Poisson(\lambda t)$$

Τότε η

$\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται <u>μεικτή διαδικασία Poisson</u>

και

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, dG(\lambda) \qquad s \geq 0$$

3 Θεωρούμε μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με άλματα. Τα άλματα συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson και το μέγεθος του άλματος είναι τυχαίο, με κάποια συγκεκριμένη κατανομή.
Τότε το συνολικό μέγεθος των αλμάτων μέχρι τη χρ. στιγμή t είναι στ. διαδ.!

ΟΡΙΣΜΟΣ
Η στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται σύνθετη διαδικασία Poisson (compound Poisson Process) εάν μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$\underbrace{X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i}$$ όπου

- $\{N(t), t \geq 0\}$ διαδ. Poisson ρυθμού λ
- Y_i, $i = 1, \dots$ ανεξ. & ισόνομες και ανεξ. από την $\{N(t), t \geq 0\}$

Παραδείγματα

1. Έστω ότι οι αφίξεις λεωφορείων σε μια στάση γίνονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson. Τα άτομα σε κάθε λεωφορείο είναι ανεξ. & ισόνομες τμ Y_i, $X(t)$ ο συνολικός αριθμός των ατόμων που έφτασαν μέχρι τη χρονική στιγμή t, $\{X(t), t \geq 0\}$ σύνθετη διαδικασία Poisson

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

2. Έστω ότι οι πελάτες εξέρχονται από ένα κατάστημα σύμφωνα με διαδικασία Poisson. Το κάθε άτομο ξοδεύει ένα ποσό Y_i (ανεξ. & ισον. τμ)
$X(t)$ το συνολικό ποσό που ξοδεύουν οι πελάτες που εξέρχονται από το κατάστημα μέχρι το χρόνο t. $\{X(t), t \geq 0\}$ συνθ. διαδ. Poisson