Ασκήσεις

στ διαδικασίες Poisson

ΑΣΚΗΣΗ μαθ φυσκ

Έστω $\{N_1(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_1)$, $\{N_2(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_2)$ ανεξάρτητες

Να βρεθούν: (i) η πιθανότητα στη 2η διαδικασία να συμβεί ακριβώς ένα γεγονός πριν το πρώτο γεγονός στην 1η διαδικασία

(ii) ο αναμενόμενος αριθμός γεγονότων στη 2η διαδικασία πριν το πρώτο γεγονός στην 1η διαδικασία

α' τρόπος

(i) $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ $\{N(t); t \geq 0\}$ υπέρθεση τους.

$Z_k = i \Leftrightarrow$ στο κ-οστό γεγονός έχω γεγονός τύπου i $i = 1, 2$

$$P(Z_1 = 2, Z_2 = 1) = P(Z_1 = 2) \cdot P(Z_2 = 1) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

(ii) $Y = \#$ γεγονότων στην 2η διαδικασία (αποτυχίες) πριν το 1ο γεγονός στην 1η (1η επιτυχία)

$Y \sim$ Γεωμετρική (p) $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ $P(Y = y) = (1-p)^y p$ $y = 0, 1, 2 \ldots$

$$E(Y) = \frac{1-p}{p} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

β' τρόπος

$\{N_1(t), t \geq 0\}$ $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \ldots$ $S_1^{(1)} = X_1^{(1)} \sim exp(\lambda_1)$

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ $S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \ldots$

$$\rightarrow P(N_2(S_1^{(1)}) = 1) = \int_0^\infty P(N_2(S_1^{(1)}) = 1 / S_1^{(1)} = s) \, dF_{S_1^{(1)}}(s)$$

$$= \int_0^\infty P(N_2(s) = 1) \, dF_{X_1^{(1)}}(s) = \int_0^\infty P(N_2(s) = 1) \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} ds$$

$N_2(t) \sim Poisson(\lambda_2 t)$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 s} \frac{(\lambda_2 s)^1}{1!} \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} ds$$

$$= \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \underbrace{\int_0^\infty s (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) s} ds}_{E(S) \quad S \sim exp(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

$$= \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Φυλλάδιο Βασικών ασκήσεων Οικονόμου

5. Θεωρούμε $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ και $\{N_2(t) : t \geq 0\}$ δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Έστω A_i να είναι ο αριθμός των γεγονότων στη διαδικασία $\{N_i(t)\}$ πριν το πρώτο γεγονός στην άλλη διαδικασία, $i = 1, 2$.
   1. Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις πιθανότητας των A_i, $i = 1, 2$.
   2. Να εξεταστεί αν οι A_1 και A_2 είναι ανεξάρτητες.

H/W

Άσκηση

Έστω 2 ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2. $\{N_1(t), t\geq 0\}$ $PP(\lambda_1)$, $\{N_2(t), t\geq 0\}$ $PP(\lambda_2)$

Θεωρούμε $n\in\mathbb{N}$. (i) Δώστε την κατανομή του αριθμού των γεγονότων της πρώτης διαδικασίας, πριν το n-οστό γεγονός της 2ης διαδικασίας.

(ii) Βρείτε την πιθανότητα το 2ο γεγονός της 1ης διαδικασίας να συμβεί πριν το 3ο γεγονός στη 2η διαδικασία.

$\{N_1(t), t\geq 0\}$ $\quad S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots$

$\{N_2(t), t\geq 0\}$ $\quad S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \dots$

(i) Αρνητική διωνυμική

(ii) $P(N_1(S_n^{(2)}) = k) =$;

$$= \int_0^\infty P(N_1(S_n^{(2)}) = k \mid S_n^{(2)} = s)\, dF_{S_n^{(2)}}(s)$$

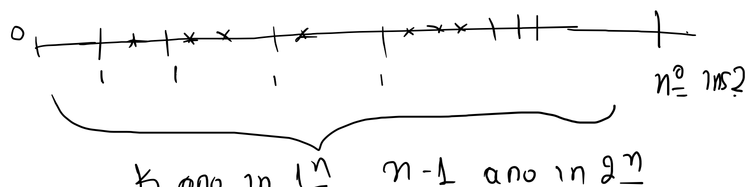
$$S_n^{(2)} \sim \underbrace{X_1^{(2)}}_{\sim exp(\lambda_2)} + \dots + \underbrace{X_n^{(2)}}_{\sim exp(\lambda_2)}$$

$$S_n^{(2)} \sim \Gamma(n, \lambda_2)$$

$$= \int_0^\infty P(N_1(s) = k)\, dF_{S_n^{(2)}}(s) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_1 s} (\lambda_1 s)^k / k! \; \frac{\lambda_2^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda_2 s}\, ds$$

$$= \dots = \binom{k+n-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n$$



(iii) Το $2^{\underline{o}}$ της $N_1(t)$ να συμβεί πριν το $3^{\underline{o}}$ της $N_2(t)$.

$$P\left(N_1\left(S_n^{(2)}\right)=k\right)$$

$$P\left(N_1\left(S_3^{(2)}\right)\geq 2\right)=1-\sum_{k=0}^{1}\binom{3+k-1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{3}$$

Άσκηση (οι αφίξεις σε ένα κόμβο)

Έστω ότι η κίνηση σε ένα δρόμο μοντελοποιείται απο διαδικασία Poisson με ρυθμό 40 οχημάτων την ώρα. 10% είναι φορτηγά και 90% αυτοκίνητα (επιβατικά). Έστω ότι οι τύποι οχημάτων είναι ανεξάρτητοι.

α) Να βρεθεί η πιθανότητα ότι σε μια ώρα, πέρασε τουλάχιστον ένα φορτηγό από τον κόμβο

β) Έστω ότι σε μια ώρα παρατήρησης, ακριβώς 10 φορτηγά πέρασαν στον κόμβο. Βρείτε τον αναμενόμενο # αυτοκινήτων που πέρασαν τον κόμβο την ώρα αυτή.

γ) Έστω ότι σε μια ώρα παρατήρησης, ακριβώς 50 οχήματα πέρασαν στον κόμβο. Βρείτε την πιθανότητα ότι ανάμεσα στα οχήματα, υπήρχαν 5 φορτηγά και 45 αυτοκίνητα

δ) Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό των αυτοκινήτων που πέρασαν πριν περάσει το πρώτο φορτηγό.

ε) Ποια η πιθανότητα σε μια ώρα να πέρασαν 10 οχήματα, με αυτή τη σειρά: Φ Φ Α Φ Α Α Α Α Φ Α

στ) Ποια η πιθανότητα σε μια ώρα να πέρασαν 10 οχήματα; 4 Φ, 6 Α.

Λύση

$N_\varphi(t) = \#$ φορτηγών σε χρόνο $(0,t]$ $\qquad P_\varphi = \frac{10}{100}$

$N_A(t) = \#$ αυτοκινήτων " $(0,t]$ $\qquad P_A = \frac{90}{100}$

$N(t) = \#$ οχημάτων σε χρόνο $(0,t]$ $\qquad N(t) = N_A(t) + N_\varphi(t)$

$\{N(t),\ t \geq 0\}$ $PP(40)$ $\qquad \lambda = 40$

Από Θ. Διάσπασης $\quad \{N_\varphi(t),\ t\geq 0\}$ $PP(\underbrace{40 \cdot \frac{10}{100}}_{4})$ $\qquad \lambda_\varphi = 4 \quad S_1^\varphi, S_2^\varphi, \ldots$

$\{N_A(t),\ t \geq 0\}$ $PP(\underbrace{40 \cdot \frac{90}{100}}_{36})$ $\qquad \lambda_A = 36 \quad S_1^A, S_2^A \ldots$

οι χρόνοι ανανεώσεις

(α) $P(N_\varphi(1) \geq 1) = 1 - P(N_\varphi(1) = 0) = 1 - e^{-4 \cdot 1} (4 \cdot 1)^0 / 0! = 1 - e^{-4}$

(β) $E(N_A(1) / N_\varphi = 10) = E(N_A(1)) = \lambda_A \cdot 1 = 36$

(γ) $P(N_\varphi(1) = 5,\ N_A(1) = 45 / N(1) = 50) = \binom{50}{5}(0.1)^5(0.9)^{45} = 0.185$

(δ) $E(N_A(S_1^\varphi)) = E[E(N_2(S_1^\varphi / S_1^\varphi)] = E(\lambda_A S_1^\varphi) = \lambda_A E(S_1^\varphi) = \lambda_A \cdot \frac{1}{\lambda_\varphi} = \frac{36}{4} = 9$

(ε) Για $\{Z_k = i\} = \{$το κ-οστό όχημα είναι τύπου $i\}$ $\quad i = \underset{\varphi}{1}, \underset{A}{2}$

$P(N(1) = 10,\ Z_1 = 1,\ Z_2 = 2,\ Z_3 = A, \ldots, Z_9 = A, Z_{10} = A) =$

$= e^{-40} \cdot \frac{40^{10}}{10!} \left(\frac{10}{100}\right)^{4} \left(\frac{90}{100}\right)^{6}$

Σχόλιο: $\frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\varphi + \lambda_A} = \frac{40 \cdot \frac{10}{100}}{40 \cdot \frac{100}{100}} = \frac{10}{100} = P_\varphi$

(στ) $e^{-40} \cdot \frac{40^{10}}{10!} \binom{40}{4} \left(\frac{10}{100}\right)^4 \left(\frac{90}{100}\right)^6$

12. Θεωρούμε ότι πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε πελάτης μενει στο σύστημα για εκθετικό χρόνο με παράμετρο μ και κατόπιν αναχωρεί. Οι εκθετικοί χρόνοι παραμονής των πελατών θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Αποδείξτε ότι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα τη στιγμή t είναι $\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$.
Βιντεοδιάλεξη μαθήματος 23 - Χωρίο 3

Φυλλαδιο Βασικών ασκήσεων
Οικονόμου

14. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ καταγράφεται ως τυπου 1 με πιθανότητα p και ως τύπου 2 με πιθανότητα $1-p$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα. Έστω $\{N_1(t)\}$ η απαριθμήτρια διαδικασία των γεγονότων τύπου 1 και $\{N_2(t)\}$ η απαριθμήτρια διαδικασία των γεγονότων τύπου 2. Έστω, επίσης, T_1 και T_2 οι χρόνοι πρώτων γεγονότων στις $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η από κοινού συνάρτηση κατανομής των T_1, T_2, δηλαδή η συνάρτηση

$$F_{T_1,T_2}(t_1, t_2) = P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2).$$

Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 11 - Χωρίο 3

H/W

15. Ένα σύστημα υπόκειται σε k διαφορετικά είδη ηλεκτρικών διαταραχών (shocks). Οι ηλεκτρικές διαταραχές των διαφόρων τύπων συμβαίνουν ανεξάρτητα και μάλιστα οι ηλεκτρικές διαταραχές τύπου i συμβαίνουν συμφωνα με μια Poisson διαδικασία με ρυθμό λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Μια ηλεκτρική διαταραχή τύπου i προκαλεί βλάβη στο σύστημα με πιθανότητα p_i, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο. Έστω T ο χρόνος ζωής του συστήματος (δηλαδή ο χρόνος μέχρι να πάθει βλάβη από κάποια ηλεκτρική διαταραχή) και Z_1 το είδος της ηλεκτρικής διαταραχής που προκάλεσε τη βλάβη. Να υπολογιστεί η πιθανότητα

$$P(T > t, Z = i).$$

Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 11 - Χωρίο 4

$\{N_i(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_i)$ ανεξ.

$\downarrow$ διασπαση

$N_i(t) = N_{iB}(t) + N_{i\not{B}}(t)$

βλαβη   χωρις βλαβη

$\{N_{iB}(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_i \cdot p_i)$

$\downarrow$ υπερθεση

$N(t) = N_{1B}(t) + \cdots + N_{kB}(t)$

$\{N(t); t \geq 0\}$ $PP\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\right)$

$T = X_1$

$T \sim \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\right)$

Απο Θ. υπερθεσης Εχω:

$$P(T > t, Z_1 = i) = P(T > t) \cdot P(Z_1 = i) = e^{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i} \frac{\lambda_i p_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i}$$

16. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ καταγράφεται με πιθανότητα $1/3$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα στη διαδικασία $\{N_1(t)\}$. Από την άλλη μεριά θεωρούμε τη διαδικασία $\{N_2(t)\}$ που καταγράφει μόνο τα k-οστά γεγονότα της $\{N(t)\}$, όπου το k είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή το 3ο, το 6ο, το 9ο κλπ. γεγονός. Επομένως και η $\{N_2(t)\}$ καταγράφει με πιθανότητα $1/3$ αλλά όχι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα.

1. Είναι η $\{N_2(t)\}$ διαδικασία Poisson;
2. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N_1(t) = 3|N_2(t) = 1)$.

Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 11 - Χωρίο 5