Υπέρθεση - Διάσπαση

I.

Όταν έχουμε στ. διαδ.

$N_1(t)$ απαριθμήτρια για γεγονός τύπου 1

$N_2(t)$ » » » 2

⋮

$N_r(t)$ " " " r

Μπορώ να πάρω $N(t)$: απαριθμήτρια όλων των γεγονότων :

ΥΠΕΡΘΕΣΗ

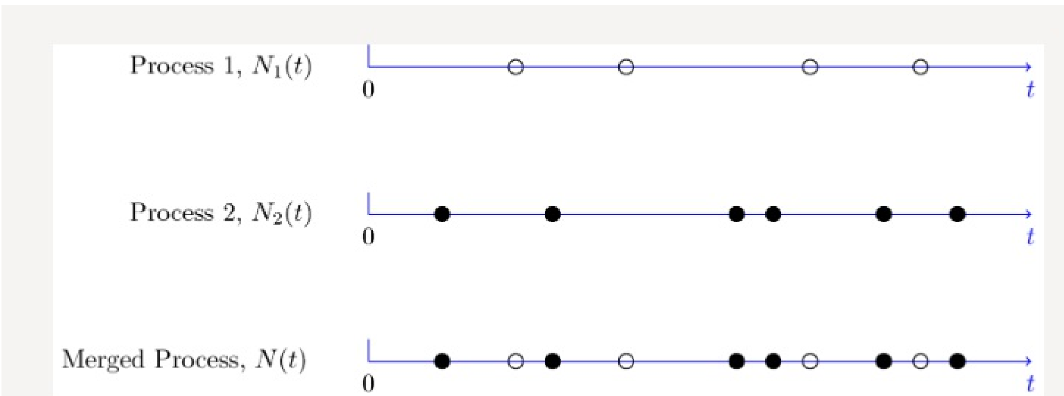
superposition

merged

Έστω $\{N_i(t), t \geq 0\}$ $i = 1, \dots, r$ ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson, $(N_i(t) \sim P(\lambda_i t))$

Ορίζουμε $N(t) = N_1(t) + \dots + N_r(t)$ $\quad t \geq 0$

Η διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται υπέρθεση των r διαδικασιών $\{N_i(t), t \geq 0\}$ $i = 1, \dots, r$. (Superposition)



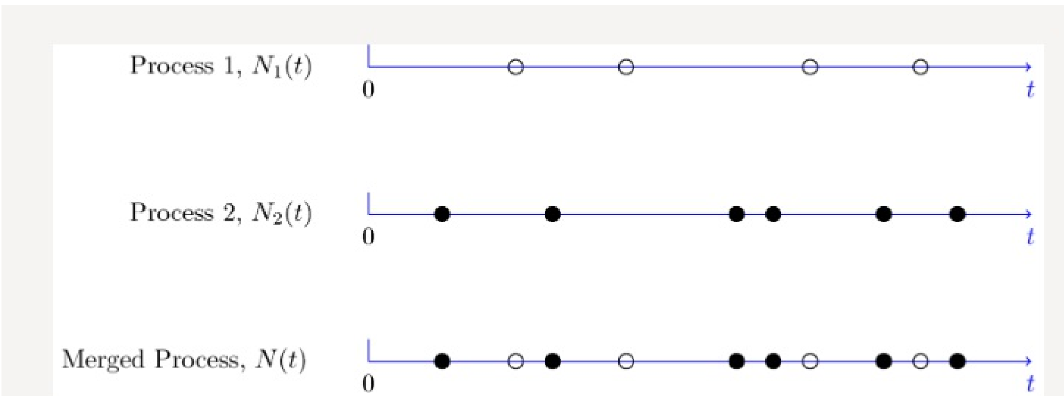
probability course

Ορίζουμε $Z_k = i$ εάν το k-οστό γεγονός της υπέρθεσης είναι από την i- διαδικασία

Έστω $\{N_i(t), t \geq 0\}$ $i = 1, \ldots, r$ ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson, $(N_i(t) \sim P(\lambda_i t))$

Ορίζουμε $N(t) = N_1(t) + \cdots + N_r(t)$ $\quad t \geq 0$

Η διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται υπέρθεση των r διαδικασιών $\{N_i(t), t \geq 0\}$ $i = 1, \ldots, r$. (Superposition)



probability course

Ορίζουμε $Z_k = i$ εάν το k-οστό γεγονός της υπέρθεσης είναι από την i- διαδικασία

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\{N_1(t), t\geq 0\}$, $\{N_2(t), t\geq 0\}$ ανεξ. διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Τότε η $\{N(t), t\geq 0\}$ όπου $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ είναι επίσης διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_1+\lambda_2$

απόδειξη

- $\forall\, t>0$ $N_1(t) \sim Poisson(\lambda_1 t)$, $N_2(t) \sim Poisson(\lambda_2 t)$, και είναι ανεξ. τμ

άρα $N(t) \sim Poisson((\lambda_1+\lambda_2)\, t)$ και αυτό ισχύει για $\forall$ διάστημα μήκους t όχι μόνο για $(0,t]$

- Τα γεγονότα σε ξένα διαστήματα είναι ανεξάρτητα αφού είναι ανεξάρτητα στις αρχικές διαδικασίες, οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

Εφαρμογή

Εστω $\{N_1(t), t\geq 0\}$ $PP(\overset{\lambda_1}{1})$, $\{N_2(t), t\geq 0\}$ $PP(\overset{\lambda_2}{2})$, ανεξάρτητες, $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$

λογ. Πρότασης $\{N(t), t\geq 0\}$ $PP(3)$

(i) $P(N(1)=2, N(2)=5)$

(ii) $P(N_1(1)=1 \,/\, N(1)=2)$

Λύση

$$(i)\ P(N(1)=2, N(2)=5) = P(N(1)=2, N(2)-N(1)=3) \underset{\text{ομογ. προσ.}}{\overset{\text{ανεξ προσαυξ}}{=}}$$

$$= P(N(1)=2)\,P(N(2)-N(1)=3)$$

$$= P(N(1)=2)\,P(N(1)=3)$$

$$= e^{-3\cdot 1}\frac{(3\cdot 1)^2}{2!} \cdot e^{-3\cdot 1}\frac{(3\cdot 1)^3}{3!}$$

$$(ii)\ P(N_1(1)=1 \,/\, N(1)=2) = \frac{P(N_1(1)=1, N(1)=2)}{P(N(1)=2)} = \frac{P(N_1(1)=1, N_2(1)=1)}{P(N(1)=2)} \overset{N_1, N_2 \text{ ανεξ}}{=}$$

$$= \frac{P(N_1(1)=1)\cdot P(N_2(1)=1)}{P(N(1)=2)} = \frac{e^{-1\cdot 1}\frac{(1\cdot 1)^1}{1!}\, e^{-2\cdot 1}\frac{(2\cdot 1)^1}{1!}}{e^{-3\cdot 1}\frac{(3\cdot 1)^2}{2!}} =$$

$$\binom{2}{1}$$

$$= 2\,\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

Γενικότερα:

ΘΕΩΡΗΜΑ υπέρθεσης

Έστω $\{N_i(t), t\geq 0\}$ $i=1,\dots,r$ ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson όπου $\{N_i(t), t\geq 0\}$ έχει ρυθμό λ_i $i=1,\dots r$. Τότε

(i) Η υπέρθεσή τους $\{N(t), t\geq 0\}$ είναι στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$

(ii) Οι Z_k, $k=1,2,\dots$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ με

$$P(Z_k = i) = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \quad i=1,2,\dots,r. \qquad k=1,2,\dots$$

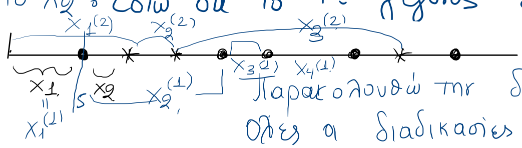
απόδειξη

(i) Χρησιμοποιώντας το συλλογισμό της προηγούμενης πρότασης, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τον μακροσκοπικό ορισμό της $N(t)$ εναλλακτικά, για τον ανανεωτικό ορισμό:

Έστω $\{X_n^{(i)}, n\geq 1\}$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι της $\{N_i(t), t\geq 0\}$, όπου $X_n^{(i)} \sim exp(\lambda_i)$ και $\{X_n, n\geq 1\}$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι της $\{N(t), t\geq 0\}$. Είναι

$X_1 = \min\{X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \dots, X_1^{(r)}\} \sim exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)$

Για το X_2: Έστω ότι το 1ο γεγονός έγινε τη χρονική στιγμή $S_1 = s$, από την j διαδ. $X_1 = X_1^{(j)}$



πχ για $r=2$.

Παρακολουθώ την διαδικασία από το χρόνο s και μετά όλες οι διαδικασίες είναι σα να ξεκινούν από την αρχή! λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής

πάλι $X_2 = \min\{X_1'^{(1)}, X_1'^{(2)}, \dots, X_1'^{(r)}\}$ (στο πχ $X_1'^{(1)} = X_2^{(1)}$, $X_1'^{(2)} = X_1^{(2)} - X_1$)

$X_1'^{(1)}, X_1'^{(2)}, \dots X_1'^{(r)}$ ανεξ $\sim exp(\lambda)$

άρα πάλι $X_2 \sim exp(\lambda_1 + \dots \lambda_r)$

Συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι $X_n \sim exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)$

(ii) $P(Z_1 = i) = P(\min(X_1^{(1)}, \dots, X_1^{(r)}) = X_1^{(i)})$ λόγω ιδιότητας εκθετικής

$$= \frac{\lambda i}{\lambda_1 + \dots \lambda r}.$$

και όπως πριν

$$P(Z_k = i) = \frac{\lambda i}{\lambda_1 + \dots + \lambda r}.$$

<u>Άσκηση</u>

Πελάτες φτάνουν σε μια τράπεζα. Διακρίνουμε 3 τύπους πελατών. Οι τύπου 1 καταθέτουν χρήματα, τύπου 2 αποσύρουν χρήματα, τύπου 3 κάνουν ανάληψη + κατάθεση. Έστω ότι η κατάθεση κρατά 3΄, η ανάληψη 4΄ και ο συνδυασμός 6΄.

Οι πελάτες τύπου I φτάνουν στη τράπεζα σύμφωνα με διαδ. Poisson ρυθμού $\lambda_1 = 20$

" " II " " " " " $\lambda_2 = 15$

" " " " " " " $\lambda_3 = 10$

$\lambda = \Sigma \lambda_i = 45$

Ποιος είναι ο μέσος χρόνος συναλλαγής στην τράπεζα ενός πελάτη;

Λύση

Y ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη

$$E(Y) = E[E(Y|Z)]$$

$$= E(Y/Z=1)P(Z=1) + E(Y|Z=2)P(Z=2) + E(Y|Z=3)P(Z=3)$$

$$= 3 \cdot \frac{20}{45} + 4 \cdot \frac{15}{45} + 6 \cdot \frac{10}{45} =$$

$$= \frac{60+60+60}{45} = \frac{180}{45} = 4'$$

Σειρά ασκήσεων 3

Μπουρνέτας

ΑΣΚΗΣΗ 5. Έστω δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$, με ρυθμούς άφιξης λ_1 και λ_2, αντίστοιχα, και $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.
Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:
(α) $P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2)$
(β) $P(N(t) = k)$
(γ) $P(N_1(t) = k_1 | N_1(t+s) = n_1)$, για $t, s > 0, k \geq 0, n_1 \geq k$.
(δ) $P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2 | N_1(t+s) = n_1, N_2(t+s) = n_2)$, για $t, s > 0, k_1, k_2 \geq 0, n_1 \geq k_1, n_2 \geq k_2$.
(ε) $P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2 | N1_(t+s) = n_1)$, για $t, s > 0, k_1, k_2 \geq 0, n_1 \geq k_1$.
(στ) $P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2 | N(t+s) = n)$, για $t, s > 0, k_1, k_2 \geq 0, n \geq k_1 + k_2$.

! HW ! !

II. Έστω ότι γεννιούνται μωρά σ' ένα μαιευτήριο σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{N(t), t\geq 0\}$ με ρυθμό λ. Πως μπορούμε να περιγράψουμε των αριθμό των γεννήσεων κοριτσιών;

Το φύλο των παιδιών είναι ανεξάρτητες τ.μ. Το να γεννηθεί αγόρι είναι όμοια με ρίψη ενός νομίσματος με πιθανότητα εμφάνισης Γ ίση με p.

Υποθέτουμε ότι έχουμε n γεννήσεις μέχρι το χρόνο t. $(N(t)=n)$

Ο αριθμός των αγοριών που γεννιούνται μέχρι το χρόνο t είναι ο αριθμός κεφαλών σε n ανεξ. και ισόνομες ρίψεις νομίσματος, το οποίο ακολουθεί κατανομή $Bin(n,p)$. Ομοια ο # κοριτσιών που γεννιούνται μέχρι το χρόνο t ακολουθεί $Bin(n, 1-p)$.

$N_1(t) =$ # αγοριών μέχρι το χρόνο t

$N_2(t) =$ # κοριτσιών μέχρι το χρόνο t

$N(t) =$ # γεννήσεων " " " t $\qquad N(t) = N_1(t) + N_2(t)$

$$P(N_1(t)=a,\ N_2(t)=k) = P(N_1(t)=a,\ N_2(t)=k,\ N(t)=a+k) =$$

$$= P(N_1(t)=a,\ N_2(t)=k \,/\, N(t)=a+k)\ P(N(t)=a+k)$$

$$= P(N_1(t)=a \,/\, N(t)=a+k)\ P(N(t)=a+k)$$

$$= \binom{a+k}{a} p^a (1-p)^k \cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{a+k}}{(a+k)!}$$

$$P(N_1(t)=a,\ N_2(t)=k) = \frac{e^{-\lambda p t}(\lambda p t)^a}{a!} \cdot \frac{e^{-\lambda(1-p)t}(\lambda(1-p)t)^k}{k!}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η $N_1(t), N_2(t)$ είναι ανεξάρτητες Poisson τ.μ.

Ας γενικεύσουμε:

Έστω $\{N(t), t\geq 0\}$ απαριθμήτρια διαδικασία. Τα γεγονότα χαρακτηρίζονται τύπου i, $i=1,2,\dots,r$. με πιθανότητα p_i, όπου $p_1+\dots+p_r=1$ και έστω $N_i(t)=\#$ γεγονότων τύπου i στο $(0,t]$, $\{N_i(t), t\geq 0\}$ απαριθμήτρια διαδικασία.

$$N_i(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} 1_{\{Z_k=i\}}$$

$\{N_1(t), N_2(t), \dots, N_r(t)\}$ είναι διάσπαση της $N(t)$
είναι ένας διαχωρισμός Bernoulli (splitting/thinning)

$N_i(t)$ είναι μια thinned process
εκλεπτυσμένη

ΘΕΩΡΗΜΑ Διάσπασης Poisson

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $\{N_i(t), t \geq 0\}$ $i = 0, 1, \dots, r$ οι εκλεπτυσμένες που προκύπτουν με διαχωρισμό Bernoulli με πιθανότητες $p_1, \dots, p_r$. Τότε $\{N_i(t), t \geq 0\}$ είναι μια διαδικασία Poisson ρυθμού λp_i, $i = 1, \dots, r$ και $\{N_i(t), t \geq 0\}$ ανεξάρτητες μεταξύ τους.

XA

Άσκηση

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. & ισόνομες τμ $\sim exp(\lambda)$ και έστω $K \sim$ γεωμ.(p) (# δοκιμών μέχρι 1η επιτυχία) ανεξάρτητη των X_j. Ποια είναι η κατανομή της $Y = \sum_{j=1}^{K} X_j$

Λύση

α΄ τρόπος: με ροπογεννήτριες

β΄ τρόπος: Ας θεωρήσουμε $X_1, X_2, \ldots$ ενδιάμεσοι χρόνοι σε μια διαδικασία Poisson, ρυθμού λ. Ας σκεφτούμε ότι κάθε ένα από τα γεγονότα μπορεί να είναι ένα "σπέσιαλ" γεγονός με πιθανότητα p, ανεξάρτητα το ένα με το άλλο. Έτσι $K = \#$ γεγονότων μέχρι το πρώτο "σπέσιαλ" γεγονός. Τότε Y είναι ο χρόνος αναμονής μέχρι το πρώτο "σπέσιαλ" γεγονός. Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία διάσπασης, η διαδικασία των "σπέσιαλ" γεγονότων είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λp. Έτσι ο χρόνος για το πρώτο "σπέσιαλ" γεγονός ακολουθεί $exp(\lambda p)$.

Άσκηση

Έστω η διαδικασία γεννήσεων σε ένα μαιευτήριο περιγράφεται από διαδικασία Poisson ρυθμού $\lambda = 2$ γεννήσεις την ώρα, $P(\text{αγόρι}) = p = 0.519$

(i) Σε μια βάρδια 8 ωρών, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός γεννήσεων κοριτσιών.. Ποια η τυπική απόκλιση;

(ii) Βρείτε την πιθανότητα να γεννήθηκαν μόνο κορίτσια ανάμεσα στις (2, 5) μμ.

(iii) Υποθέτοντας ότι χτες γεννήθηκαν 5 μωρά. Ποια η πιθανότητα 2 να είναι αγόρια;

$\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson διαδικασία περιγράφει γεννήσεις $PP(\overset{\lambda}{2})$

$\{N_1(t), t \geq 0\}$ " " " " Αγοριών. $PP(\underbrace{2 \cdot 0{,}519}_{\lambda p \,=\, \lambda_1})$

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ " " " " Κοριτσιών $PP(\underbrace{2 \cdot 0{,}481}_{\lambda_2 \,=\, \lambda(1-p)})$

(i)

$$E[N_2(8)] = m_2(8) = \lambda_2 \cdot 8 = 2 \cdot 0.481 \cdot 8$$

$$Var(N_2(8)) = \lambda_2 \cdot 8 = 2 \cdot 0{,}481 \cdot 8$$

$$\text{Τυπ. απόκλιση} = \sqrt{2 \cdot 0.481 \cdot 8}$$

(ii)

$$P(N_2(3) > 0, N_1(3) = 0) \overset{\text{ανεξ.}}{=} P(N_2(3) > 0) \cdot P(N_1(3) = 0)$$

$$= \left(1 - e^{-2 \cdot 0{,}481 \cdot 3} \frac{(2 \cdot 0{,}481 \cdot 3)^0}{0!}\right) e^{-2 \cdot 0{,}519 \cdot 3} \frac{(2 \cdot 0.519 \cdot 3)^0}{0!}$$

(iii)

$$P(N_1(8) = 2 \,/\, N(8) = 5) = \binom{5}{2} (0{,}519)^2 (0.481)^3$$