Conditioning ...

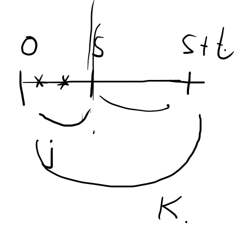
Άσκηση

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$, $0<s,t$ και $k \geq j \geq 0$. Υπολογίστε

(i) $P(N(s+t)=k \,/\, N(s)=j)$

(ii) $E(N(s+t) \,/\, N(s)=j)$

(iii) $Var(N(s+t) \,/\, N(s)=j)$



$N(s+t) / N(s)=j$

(i) $P(N(s+t)=k \,/\, N(s)=j) = P(N(s+t) - N(s) + N(s) = k \,/\, N(s)=j)$

$N - N(0)$

$$= P(N(s+t)-N(s) = k-j \,/\, N(s)=j)$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{\underset{\text{προσ}}{=}} P(N(s+t)-N(s) = k-j)$$

$$\overset{\text{ομογ}}{\underset{\text{προσ.}}{=}} P(N(t)=k-j) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-j}}{(k-j)!} \qquad k \geq j$$

(ii) $E(N(s+t) \,/\, N(s)=j) = \sum_{k=j}^{\infty} k\, e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-j}}{(k-j)!} = \ldots$

$$= E(j + \underbrace{N(t)}_{\sim \text{Poisson}(\lambda t)}) = j + E(N(t)) = j + \lambda \cdot t$$

(iii) $Var(N(s+t) \,/\, N(s)=j) = Var(j + N(t)) = Var(N(t)) = \lambda t$

Άσκηση [(Μαρκοβιανή ιδιότητα της διαδικασίας Poisson)]

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < s$ και $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m \leq j$

Τότε

$P(N(s)=j \,/\, N(t_1)=k_1, \dots, N(t_m)=k_m) = P(N(s)=j \,/\, N(t_m)=k_m)$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό.

απόδειξη

$$P(N(s)=j \,/\, N(t_1)=k_1, \dots, N(t_m)=k_m) = \frac{P(N(s)=j, N(t_1)=k_1, \dots, N(t_m)=k_m)}{P(N(t_1)=k_1, \dots, N(t_m)=k_m)}$$

$$= \frac{P(N(t_1)=k_1, N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1, \dots, N(t_m)-N(t_{m-1})=k_m-k_{m-1}, N(s)-N(t_m)=j-k_m)}{P(N(t_1)=k_1, N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1, \dots, N(t_m)-N(t_{m-1})=k_m-k_{m-1})}$$

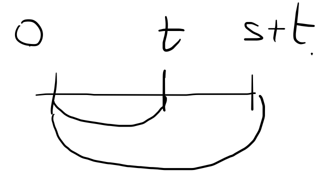
$$= \frac{P(N(t_1)=k_1) \cdot P(N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1) \cdot \dots \cdot P(N(s)-N(t_m)=j-k_m)}{P(N(t_1)=k_1) \cdot P(N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1) \cdot \dots \cdot P(N(t_m)-N(t_{m-1})=k_m-k_{m-1})}$$

$$= P(N(s)-N(t_m)=j-k_m) = P(N(s)=j \,/\, N(t_m)=k_m).$$

Ασκησοθεωρία: Δείξτε τον ακόλουθο ισχυρισμό: (όμοια με άσκηση 6 φυλλάδιο οικον.)

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$, $s,t \geq 0$. Τότε

$$P(N(\overset{3}{t}) = k \,/\, N(\overset{10}{s+t}) = \overset{6}{n}) = \binom{n}{k} \left(\frac{t}{t+s}\right)^{k} \left(\frac{s}{t+s}\right)^{n-k}$$



δηλαδή $\underline{N(t)/N(s+t)=n}$ $\sim$ Binomial(n, p) $\quad p = \dfrac{t}{t+s}$.

απόδειξη.

$$P(N(t)=k \,/\, N(s+t)=n) = \frac{P(N(t)=k,\ N(s+t)=n)}{P(N(s+t)=n)} =$$

$$= \frac{P(N(s+t)-N(t)=n-k,\ N(t)=k)}{P(N(s+t)=n)} \overset{\text{ανεξ}}{\underset{\text{προσ}}{=}} \frac{P(N(s+t)-N(t)=n-k)\,P(N(t)=k)}{P(N(s+t)=n)} =$$

$$\overset{\text{ομοσ}}{\underset{\text{προσ}}{=}} \frac{P(N(s)=n-k)\,P(N(t)=k)}{P(N(s+t)=n)} = \frac{\cancel{e^{-\lambda s}} \dfrac{(\lambda s)^{n-k}}{(n-k)!} \ \cancel{e^{-\lambda t}} \dfrac{(\lambda t)^{k}}{k!}}{\cancel{e^{-\lambda(s+t)}} \dfrac{(\lambda(s+t))^{n}}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad \frac{s^{n-k}}{(s+t)^{n-k}} \quad \frac{t^{k}}{(s+t)^{k}}.$$

Σχόλιο: εαν $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$, η από κοινού δεσμευμένη κατανομή των $N(t_1), N(t_2)-N(t_1), \dots, N(t_m)-N(t_{m-1})$ δοθέντος του $N(t_m)=n$ είναι πολυωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\left(\frac{t_1}{t_m}, \frac{t_2-t_1}{t_m}, \dots, \frac{t_m-t_{m-1}}{t_m}\right)$

Δοθέντος του $N(t_m)=n$, ξέρουμε ότι γεγονότα συνέβησαν στο $[0,t_m]$

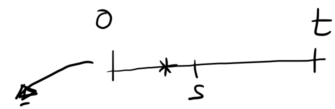
Το καθε ενα γεγονός συνέβει ανεξάρτητα του άλλου και η πιθανότητα ένα γεγονός να συνέβη σε συγκεκριμένο διαστημα είναι ένα μηκος του διαστήματος προς το συνολικό μήκος

Σκεφτόμαστε τη διαδικασία Poisson ως τρόπος μοντελοποίησης "τελείως τυχαίας" κατανομής γεγονότων στον χρόνο. $[0,\infty)$
Αν και δεν είναι δυνατό να ορίσουμε ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,\infty)$, υπάρχει μια ισχυρή σχέση ανάμεσα στη διαδικασία Poisson και στην ομοιόμορφη κατανομή

Εάν η διαδικασία Poisson έχει ακριβώς $\underline{\underline{n}}$ γεγονότα στο $[0,t]$ τότε οι χρόνοι που συνέβησαν αυτά τα γεγονότα κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό. (Θα το δείξουμε στη συνέχεια.)

Ας το δείξουμε εδώ για την περίπτωση 1 γεγονότος:

Έστω $0 \le s \le t$



S_1 /

$$P(S_1 \le s / N(t)=1) = \frac{P(S_1 \le s,\ N(t)=1)}{P(N(t)=1)} = \frac{P(N(s)=1,\ N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N(s)=1,\ N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)} \overset{\text{ανεξ. πρ.}}{=} \frac{P(N(s)=1)\,P(N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$\overset{\text{ομογ. προσ.}}{=} \frac{P(N(s)=1)\,P(N(t-s)=0)}{P(N(t)=1)} = \frac{\cancel{e^{-\lambda s}}\frac{(\lambda s)^1}{1!}\,\cancel{e^{-\lambda(t-s)}}\frac{(\lambda(t-s))^0}{0!}}{\cancel{e^{-\lambda t}}\frac{(\lambda t)^1}{1!}} = \frac{s}{t}$$

για να δείξουμε την περίπτωση περισσότερων γεγονότων στο $[0,t]$ (Θ. Campbell (Β7)) θα μελετήσουμε το θέμα των Διατεταγμένων τ.μ. (order statistics)

Διατεταγμένες τυχαίες μεταβλητές

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.μ. και $X_{i:n}$ η i-οστή μικρότερη

$X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$ $(= X_{(1)})$

$X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$ $(= X_{(n)})$

Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες & ισόνομες τ.μ, συνεχείς, με α.σ.κ $F(x)$ και σππ $f(x)$

Τότε για την κατανομή της $X_{i:n}$ $\quad i = 1, \dots, n)$

$F_{X_{i:n}}(x) = P(X_{i:n} \leq x) = P($ τουλάχιστον i από τις $X_1, \dots, X_n$ είναι $\leq x)$

Ας θεωρήσουμε ως "ΕΠΙΤΥΧΙΑ" μια μεταβλητή X_j να είναι $\leq x$ με

$$p = P(E) = F(x) = P(X \leq x)$$

Έχω n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, ζητάω i τουλάχιστον επιτυχίες

$$F_{X_{i:n}}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} \left(F(x)\right)^k \cdot \left(1 - F(x)\right)^{n-k}$$

$$f_{X_{i:n}}(x) = \sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k} k (F(x))^{k-1} f(x)[1-F(x)]^{n-k} + \sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}(F(x))^{k}(n-k)(1-F(x))^{n-k-1}(-f(x))$$

$$= \sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k} k f(x)(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k} - \sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}(n-k) f(x)(F(x))^{k}(1-F(x))^{n-k-1}$$

$n-k = n-u+1$

$\Uparrow$

$k+1=u$

$$= \sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k} k \underline{f(x)(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}} - \sum_{u=i+1}^{n}\binom{n}{u-1}(n-u+1)\underline{f(x)(F(x))^{u-1}(1-F(x))^{n-u}}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \qquad \frac{n!}{(u-1)!(n-u+1)!}(n-u+1) \qquad \frac{n!}{(u-1)!(n-u)!}$$

$$f_{X_{i:n}}(x) = \binom{n}{i}\cdot i\, f(x) \underbrace{(F(x))^{i-1}}_{\text{όσες είναι } \le x} \underbrace{(1-F(x))^{n-i}}_{\text{όσες είναι } > x} = n\, f(x)\binom{n-1}{i-1}(F(x))^{i-1}(1-F(x))^{n-i}$$

↑ με πόσους τρόπους διαλέγω τα $i-1$ από τα $n-1$ να έρθουν κάτω από το x.

$$\frac{n!}{i!(n-i)!}\, i = \frac{(n-1)!\, n}{(i-1)!(n-i)!}$$

$i-1$ μικρότερες του x. $\qquad$ $n-i$ μεγαλύτερες του

x

↑ 1 σε μικρό διάστημα γύρω από το x

$(i-1)!$ τρόποι να διαταχθούν

↑ $(n-i)$ τρόποι να διαταχθούν

$$P(X_{1:n} \leq x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n$$

$$f_{X_{1:n}}(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} f_X(x)$$

$$P(X_{n:n} \leq x) = [F_X(x)]^n$$

$$f_{X_{n:n}}(x) = n f_X(x) [F_X(x)]^{n-1}$$

$B(a,b)$

Ειδική Περίπτωση :

Έστω $U_1, \dots, U_n$ ανεξάρτητες & ισόνομες τμ, κατανεμημένες ομοιόμορφα στο $[0, t]$ $\quad (U_i \sim U[0,t] \quad i=1,\dots,n)$

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{t} & x \in [0,t] \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \qquad F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{t} & 0 \le x < t \\ 1 & x \ge t \end{cases}$$

$$F_{U_{i:n}}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} [F_U(x)]^k [1 - F_U(x)]^{n-k}$$

$$f_{U_{i;n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \left(\frac{x}{t}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-i} \cdot \frac{1}{t} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (t-x)^{n-i} \cdot \frac{1}{t^n}$$

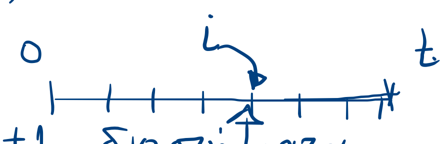
για $t = 1$ $\qquad U_i^* \sim U(0,1)$

$$f_{U^*_{i:n}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n+1-i)} x^{i-1} (1-x)^{n-i} \qquad Beta(i, n-i+1)$$

$$E(U^*_{i:n}) = \frac{i}{n+1}$$

$U_i \sim U(0,t) \qquad U_i^* \sim U(0,1) \qquad U_i = t \cdot U_i^*$

$$\boxed{E(U_{i:n}) = \frac{i \cdot t}{n+1}}$$



n+1 διαστήματα

$\frac{t}{n+1} \Leftarrow$ μήκος

Ισχυει:

$$f_{X_{1:n},\dots X_{n:n}}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} n!\, f(x_1)\cdot\ldots\cdot f(x_n) & 0\le x_1<\dots<x_n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Πραγματι:

[εαν θεωρήσω το γεγονός $A = \{ y_1 < X_{1:n} \le x_1,\ y_2 < X_{2:n} \le x_2, \dots, y_n < X_{n:n} < x_n \}$

για $y_1 < x_1 \le y_2 < x_2 \le y_3 < x_3 \le \dots \le y_n < x_n$

αυτό μπορει να συμβεί εαν

$\{ y_1 < X_1 \le x_1,\ y_2 < X_2 \le x_2, \dots, y_n < X_n < x_n \}$

ή $\{ y_1 < X_3 < x_1,\ y_2 < X_5 \le x_2, \dots, y_n < X_{n-2} < x_n \}$

ή ... $n!$ διαφορετικούς τρόπους.

Ετσι

$$P(A) = n!\, P(y_1 < X_1 \le x_1, \dots, y_n < X_n < x_n) =$$

$$= n! \prod_{i=1}^{n} P(y_i < X_i \le x_i) = n! \prod_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(y_i)]$$

δηλαδή $\displaystyle\int_{y_n}^{x_n}\int_{y_{n-1}}^{x_{n-1}}\cdots\int_{y_1}^{x_1} f_{X_{1:n},\dots,X_{n:n}}(u_1,\dots,u_n)\, du_1 du_2 \dots du_n = n! \prod_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(y_i)]$

Παραγίζω $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ και προκύπτει το ζητούμενο]

Η απο κοινού κατανομή των $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$

$$f_{X_{1:n},\dots,X_{n:n}}(x_1, x_2, \dots x_n) = \begin{cases} n!\, f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n) & 0 \le x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Εαν εχω $U_i \sim U(0, t)$

$$f_{U_{1:n},\dots,U_{n:n}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! \cdot \frac{1}{t} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{t} = \frac{n!}{t^n} & 0 \le x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

β' τρόπος : Να βρω την σππ της $X_{i:n}$, ως περιθώρια των $(X_{1:n}, \dots X_{n:n})$

$$f_{(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})}(x_1, \dots, x_n) = n!\, f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \qquad 0 < x_1 < x_2 < \dots x_n$$

$$f_{(X_{2:n}, \dots X_{n:n})}(x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_2} f_{(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 =$$

$$= n!\, f(x_2) \cdots f(x_n) F(x_2)$$

ομοίως συνεχίζω

$$f_{(X_{i:n}, \dots, X_{n:n})}(x_i, \dots, x_n) = \frac{n!}{(i-1)!} f(x_i) \cdots f(x_n) [F(x_i)]^{i-1}$$

Τώρα από δεξιά συνεχίζω

$$f_{(X_{i:n}, \dots X_{n-1:n})}(x_i, \dots, x_{n-1}) = \int_{x_{n-1}}^{\infty} f_{(X_{i:n}, \dots, X_{n:n})}(x_i, \dots, x_n)\, dx_n = \frac{n!}{(i-1)!} f(x_i) \cdots f(x_{n-1}) [F(x_i)]^{i-1} [1 - F(x_{n-1})]$$

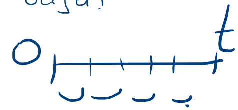
$\vdots$

Το ζητούμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ Campbell

Έστω $\{N(t), t\geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και χρόνους γεγονότων $S_1,\dots,S_n$. Τότε

(για $S_1/N(t)=1$ το έχουμε δείξει!)



S $\quad (S_1,\dots,S_n)/N(t)=n \;\overset{d}{=}\; (U_{1:n},\dots,U_{n:n})$

όπου $U_1, U_2,\dots,U_n$ ανεξ, ομοιόμορφα κατανεμημένες τμ στο $(0,t]$.

απόδειξη

s Έστω: $0 \leq s_0 < s_1 < s_2 \dots < s_n$

$$f_{((S_1,\dots,S_n)/N(t)=n)}(s_1,\dots,s_n) = \lim_{h_1,h_2,\dots\to 0^+} \frac{\overbrace{P(s_1<S_1\leq s_1+h_1,\ s_2<S_2\leq s_2+h_2,\dots,\ s_n<S_n\leq s_n+h_n}^{A}/N(t)=n)}{h_1\cdots h_n}$$

$$= \lim_{h_1,h_2\dots\to 0^+} \frac{P(s_1<S_1\leq s_1+h_1,\ s_2<S_2,\ \dots,\ s_n<S_n\leq s_n+h_n,\ N(t)=n)}{h_1\cdots h_n\ P(N(t)=n)}$$

σκέψη: Το γεγονός A είναι ισοδύναμο με

$\{(0,s_1]$ έχω μηδέν γεγονότα
$(s_1, s_1+h_1]$ " 1 γεγονός
$(s_1+h_1, s_2]$ " 0 γεγονότα $\dots$ 1 γεγονός στο $(s_n, s_n+h_n]$, 0 στο $(s_n+h_n, t]\}$

$N(h_1+s_1)-N(s_1)=1$
$N(h_1)=1$

ανεξ. ομογ.

$$= \lim_{h_1,h_2\dots h_n\to 0^+} \frac{P(N(s_1)=0)P(N(h_1)=1)P(N(s_2-s_1-h_1)=0)P(N(h_2)=1)\cdot\ldots\cdot P(N(h_n)=1)P(N(t-s_n-h_n)=0)}{h_1\cdots h_n\cdot P(N(t)=n)}$$

$$= \lim_{h_1,h_2,\dots h_n\to 0^+} \frac{e^{-\lambda s_1}\ e^{-\lambda h_1}\ \lambda \cancel{h_1}\ e^{-\lambda(s_2-s_1-h_1)}\ e^{-\lambda h_2}\ \lambda h_2 \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda h_n}\ \lambda \cancel{h_n}\ e^{-\lambda(t-s_n-h_n)}}{\cancel{h_1}\cdots \cancel{h_n}\ e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \lim_{h_1,h_2\dots h_n\to 0^+} \frac{e^{-\lambda t}\lambda^n}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!} = \frac{n!}{t^n} = f_{(U_{1:n},\dots,U_{n:n})}(s_1,\dots,s_n)$$

Πως "δημιουργω" μια διαδικασια Poisson; (simulation)

1. Παιρνω το $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

2. Δεδομενου του $N(t) = n$, "δημιουργούμε" n ανεξ & ισόνομες $U(0,t)$: $U_1, \ldots, U_n$

3. Για $i = 1, \ldots, n$ ορίζουμε $S_i = U_{i:n}$

$S_1 \mid N(t)=n$

Άσκηση:

Έστω $\{N(t): t\geq 0\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ και S_n ο χρόνος του n-οστού γεγονότος. 1) Υπολογίστε την $P(S_1 > s / N(t) = n)$, $n \geq 1$, 2) $E(S_1 / N(t)=n)$

Λύση

$$S_1 / N(t) = n \overset{d}{=} U_{1:n} = \min(U_1 \dots U_n) \qquad U \sim U(0,t)$$

$$F_{U_{1:n}}(u) = 1 - [1 - F_U(u)]^n \qquad F_U(u) = \begin{cases} 0 & u<0 \\ u/t & 0 \leq u < t \\ 1 & t \leq u \end{cases}$$

$$F_{U_{1:n}}(u) = 1 - \left(1 - \frac{u}{t}\right)^n \qquad 0 \leq u < t$$

$$P(S_1 > s / N(t) = n) = \left(1 - \frac{s}{t}\right)^n \qquad 0 \leq s \leq t$$

$$E(S_1 / N(t) = n) = E(U_{1:n}) = \frac{1 \cdot t}{n+1} = \frac{t}{n+1}$$

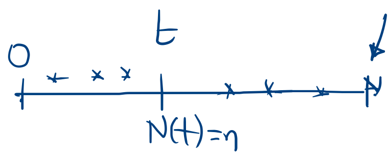
Άσκηση (συνέχεια) . $\{N(t);\ t\geq 0\}$ $PP(\lambda)$

Υπολογίστε την $E(S_k / N(t)=n)$

Λύση

Για $1\leq k\leq n$. $S_k / N(t)=n \overset{d}{\underset{\text{Θ Campbell}}{=}} U_{k:n}$ $\quad U(0,t)$

$$E(S_k / N(t)=n) = \frac{kt}{n+1}$$



Για $k > n$

αμνήμονη ιδιότητα

$$E(S_k / N(t)=n) = t + E(S_{k-n})$$
$$= t + \frac{k-n}{\lambda}$$

$S_{k-n} \sim \Gamma(k-n, \lambda)$

$= X_1 + \cdots + X_{k-n}$

$X_i \sim exp(\lambda)$ $\quad E(X_i)=\frac{1}{\lambda}$

Άσκηση

Έστω ότι πελάτες φτάνουν σ' ένα εστιατόριο σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ) $\lambda = 20$ $(N(0) = 0)$

(i) Βρείτε την πιθανότητα ο $60^{ος}$ πελάτης να φτάσει στο χρ. διάστημα $[2.9, 3]$

(ii) Εάν 60 πελάτες έχουν φτάσει μέχρι τη χρονική στιγμή $t=3$, βρείτε την πιθανότητα ο $60^{ος}$ πελάτης να έφτασε στο διάστημα $[2.9, 3]$

Λύση

(i) $P(2.9 < S_{60} < 3)$ $\qquad S_{60} \sim \Gamma(60, 20)$

$= P(S_{60} < 3) - P(S_{60} < 2.9)$

(ii) $P(2.9 < S_{60} < 3 \,/\, N(3) = 60) =$

$S_{60} / N(3) = 60 \overset{d}{=} U_{60:60}$ $\qquad U(0,3)$

$= 1 - P(S_{60} \leq 2.9 \,/\, N(3) = 60) = 1 - \left(\frac{2.9}{3}\right)^{60}$

pgamma$(3, \underline{60, 20})$ − pgamma$(2.9, \underline{60, 20})$

ως Άσκηση Θ!

Ας μελετήσουμε την κατανομή της $\boxed{S_{N(t)}}$

$$P(S_{N(t)} \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_{N(t)} \le x / N(t) = n)\, P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \le x / N(t) = n)\, P(N(t)=n)$$

$$\overset{\Theta.\,\text{Cauy}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(U_{n:n} \le x)\, P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{t}\right)^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda x}$$

$$f_{S_{N(t)}}(x) = \lambda e^{-\lambda(t-x)} \qquad 0 \le x \le t.$$

Έστω $\{N(t)\}$ μια διαδικασία Poisson(λ) και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t, δηλαδή η $E[S_{N(t)}]$.

Βιντεοδιάλεξη μαθήματος 13 - Χωρίο 2

ΒΙΒΛΙΟ ΜΠΟΥΡΝΕΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

Την έχουμε ξαναδεί

Εδώ η επίλυση με τη θεωρία αυτού του κεφαλαίου

H/W $\to$: α' τρόπος με αναγεωγικό συλλογισμό

β' τρόπος: χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης

γ' τρόπος: Θ.Δ.Μ.Τ και Θ. Campbell

$S_{N(t)}$

Θα βρεθεί $E(S_{N(t)}) = t - \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$

Σχόλιο: είχαμε βρεί

$E(S_{N(t)+1}) = (m(t)+1)E(X) = (\lambda t+1)\frac{1}{\lambda} = t + \frac{1}{\lambda}$

$E(S_{N(t)+1} - S_{N(t)}) = t + \frac{1}{\lambda} - \left(t - \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right) = \frac{2 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \underset{t \text{ μεγάλο}}{\simeq} \frac{2}{\lambda}$

Οικονομου Βασικό φυλλαδιο
μερος 3

10. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[S_1|N(t) \geq 1]$.
Βιντεοδιάλεξη μαθήματος 12 - Χωρίο 8

H/W

Φυλλαδιο Βασικών ασκήσεων Οικονομου

11. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ως συνάρτηση του λ και του t, η μέση τιμή

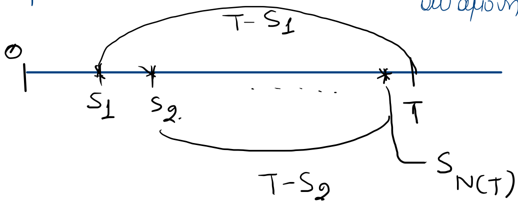
$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i].$$

Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 11 - Χωρίο 1

H/W

Άσκηση

Έστω ότι επιβάτες φτάνουν σε μια στάση λεωφορείου σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson (λ). Τα λεωφορεία αναχωρούν κάθε T χρονικές μονάδες. Υποθέστε ότι το λεωφορείο είναι επαρκώς μεγάλο ώστε να μη μένουν επιβάτες στη στάση. Ποιος είναι ο μέσος χρόνος χαμένων λεπτών αναμονής μεταξύ δύο αναχωρήσεων.



$N(T)$ # επιβατών που ήρθαν μέχρι το T

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(T)}(T-S_i)\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N(T)}(T-S_i) \,\middle|\, N(T)\right)\right] \quad \text{ΘΔΜΤ}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(T)}(T-S_i) / N(T)=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n}(T-S_i) / N(T)=n\right) =$$

$$= E\left(\overset{\text{σταθ}}{nT} - \sum_{i=1}^{n} S_i / N(T)=n\right) \overset{\text{Θ. Campbell}}{=} E\left(nT - \sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right) =$$

$$\overset{(*)}{=} nT - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} E(U_{i:n})}_{\text{διατεταγ. από ομοιομ. } U_i \sim U(0,T)} = nT - \sum_{i=1}^{n} i \frac{T}{n+1} = nT - \frac{n\cancel{(n+1)}}{2}\frac{T}{\cancel{n+1}} =$$

$$= nT - \frac{nT}{2} = \frac{nT}{2}$$

$$(*) \quad E\left(\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right)$$

$$E\left(\sum e^{-3U_{i:n}}\right) = E\left(\sum e^{-3U_i}\right)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(T)}(T-S_i)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N(T)}(T-S_i) / N(T)=n\right) P(N(T)=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nT}{2} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}$$

$$= \frac{T}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!} = \frac{T}{2}\lambda T = \frac{\lambda T^2}{2}$$