ΑΣΚΗΣΗ ΘΕΩΡΙΑ.

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ $(PP(\lambda))$

Να υπολογίσουμε την αναν. συνάρτηση $m_X(t) = E(N(t))$

(i) χρησιμοποιώντας τον αναναιωτικό ορισμό

(ii) » " ολικό "

(i) $X_1, X_2, \dots \sim exp(\lambda)$ $\quad F_X(t) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x > 0$

$$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \qquad \tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} = \frac{\lambda}{s} \overset{H/W}{\Rightarrow} m(t) = \lambda t$$

(ii)

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad m_X(t) = E(N(t)) = \lambda t$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $\{N(t), t\geq 0\}$ $PP(\lambda)$, $\lambda = 0.5$ $\qquad P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$

(i) Να βρεθεί η πιθανότητα να μην έχουμε γεγονότα στο $(3,5]$

(ii) " " " να υπάρχει ακριβώς από ένα γεγονός στα διαστήματα $(0,1]$, $(1,2]$, $(2,3]$ και $(3,4]$

(i) $$P(N(5)-N(3)=0) \overset{\text{Poisson}}{\underset{\text{ομογ.}}{=}} P(N(2)=0) = e^{-0.5\cdot 2}\frac{(0.5\cdot 2)^0}{0!} = e^{-1}$$

(ii) $$P(N(1)-\cancel{N(0)}^{0}=1,\ N(2)-N(1)=1,\ N(3)-N(2)=1,\ N(4)-N(3)=1) =$$

$$\underset{\text{προσ. Poisson}}{\overset{\text{ανεξ}}{=}} P(N(1)=1)P(N(2)-N(1)=1)P(N(3)-N(2)=1)P(N(4)-N(3)=1)$$

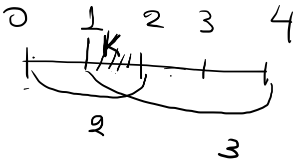
$$\underline{\underline{\text{ομογ}}}\ P(N(1)=1)\,P(N(1)=1)\,P(N(1)=1)\,P(N(1)=1)$$

$$= \left[e^{-0.5\cdot 1}\frac{(0.5\cdot 1)^1}{1!}\right]^4$$

Άσκηση

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$

Βρείτε την πιθανότητα να έχουμε 2 γεγονότα στο $(0,2]$ και 3 γεγονότα στο $(1,4]$



$$P(\underbrace{N(2)-N(\cancel{0})=2}_{A},\ \underbrace{N(4)-N(1)=3}_{B}) =$$

ΘΟΠ

$$\sum_{k=0}^{\min(2,3)} P(\underbrace{N(2)-N(0)=2}_{A},\ \underbrace{N(2)-N(1)=k}_{E_k}\ \underbrace{N(4)-N(1)=3}_{B})$$

ΘΟ

$$\sum_{k=0}^{\cancel{\min(2,3)}\ 2} P(N(1)-N(\cancel{0})=2-k,\ N(2)-N(1)=k,\ N(4)-N(2)=3-k)$$

ανεξ προσ

$$= \sum_{k=0}^{2} P(N(1)=2-k)\, P(N(2)-N(1)=k)\, P(N(4)-N(2)=3-k)$$

ομογ προσαυξ

$$= \sum_{k=0}^{2} P(N(1)=2-k) \cdot P(N(1)=k)\, P(N(2)=3-k)$$

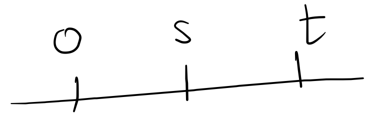
$$= \sum_{k=0}^{2} e^{-\lambda \cdot 1}\frac{(\lambda \cdot 1)^{2-k}}{(2-k)!}\ e^{-\lambda \cdot 1}\frac{(\lambda \cdot 1)^{k}}{k!}\ e^{-\lambda \cdot 2}\frac{(\lambda \cdot 2)^{3-k}}{(3-k)!}$$

Φυλ. Βασ. Ασκήσεων

Οικονομου

2. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση

$$Cov[N(t), N(s)].$$



Εσω $t \geq s > 0$

$$\underline{Cov(N(t), N(s))} = Cov(N(t) - N(s) + N(s), N(s))$$

$$= Cov(N(t) - N(s), N(s)) + Cor(N(s), N(s))$$

$$= 0 + Var(N(s)) = \underline{\underline{\lambda \cdot s}}.$$

$$Cor(N(t), N(s)) = \lambda \cdot \min(t, s)$$

4. Υποθέτουμε ότι πελάτες φθάνουν σε μια τράπεζα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 πελάτες την ώρα. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

   1. Η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μέσα σε ένα οκτάωρο λειτουργίας της τράπεζας.
   2. Η πιθανότητα κανείς πελάτης να μη μπει στην τράπεζα τα τελευταία 15 λεπτά μιας εργάσιμης μέρας.
   3. Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 και 11.00 και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την ίδια μέρα μεταξύ 10.00 και 11.00.
   4. Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 και 11.00 και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την επόμενη μέρα μεταξύ 10.00 και 11.00.

Φυλλάδιο Βασικών ασκήσεων Οικονόμου

Ξεκινάει στις 9πμ.

1. $E[N(t)] = \lambda t \qquad Var[N(t)] = \lambda \cdot t$

$E[N(8)] = 8 \cdot 8 \qquad Var[N(8)] = 8 \cdot 8$

2. $P[N(\frac{1}{4}) = 0] = e^{-8 \cdot \frac{1}{4}} \frac{(8 \cdot \frac{1}{4})^0}{0!} = e^{-2}$

$(0,2) \quad 0 \qquad (1,2)$

3. $Cor(N(11) - N(9), N(11) - N(10)) = Cor(N(2) - \cancel{N}(0), N(2) - N(1))$

$= Cor(\overbrace{N(2) - N(1)}^{(1,2)} + \underline{N(1)}^{(0,1)}, N(2) - N(1)) =$

$= Cor(N(2) - N(1), N(2) - N(1)) + \underbrace{Cor(N(1), N(2) - N(1))}_{\to 0}$

$= Var(N(2) - N(1)) = Var(N(1)) = \lambda \cdot 1 = 8 \cdot 1$

4. $Cor(N(2) - N(0), N(\overset{8+2}{24+2}) - N(\overset{8+1}{24+1})) = 0$

Φυλλαδιο Βασικών ασκήσεων Οικονόμου

1. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Να υπολογιστεί η μέση τιμή

$$E[N(t)(N(t)-1)(N(t)-2)\cdots(N(t)-k+1)]. = \text{Ζητουμενο} = (\lambda t)^k$$

H/W

1^o τρόπος : ανανεωτικός συλλογισμός

2^o τρόπος : $P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-z)}$

$$\text{Ζητουμενο} = P_{N(t)}^{(k)}(1)$$

3^{os} τρόπος : $\text{Ζητουμενο} = \sum_{n=0}^{\infty} \cancel{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\, e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$

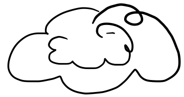
$$= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{(n-k)!} = (\lambda t)^k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}}$$

$= 1 \cdot 2 \cdots (n-k)\cancel{(n-k+1)\cdots n}$

3. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N(t)$ είναι περιττός$)$, $t \geq 0$.

Φυλλάδιο Βασικών Ασκήσεων Οικονόμου

1. $N(t) \bmod 2$. . . . .



2. Πιθανογεννήτρια $P_{N(t)}(1)$ $\qquad P_{N(t)}(1) = 1$.

$$P_{N(t)}(1) - P_{N(t)}(-1) = 2 \cdot P(N(t) \text{ περιττός})$$

3 αναλυτικά

$$P(N(t) \text{ περιττός}) + P(N(t) \text{ άρτιος}) = 1.$$

$$P(N(t) \text{ περιττός}) - P(N(t) \text{ άρτιος}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = 2k+1) - \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = 2k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(-\lambda t)^{n}}{n!} = -e^{2\lambda t}$$

$$2P(N(t) \text{ περιττός}) = 1 - e^{-2\lambda t}$$

Άσκηση 1.13 *Έστω* $\{N(t)\}$ *μια διαδικασία Poisson με ρυθμό* λ *και* $S_1, S_2, \ldots$ *οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή* t*, δηλαδή η* $E[S_{N(t)}]$.

ΒΙ ΜΟ

(να λυθεί με ανανεωτικό συλλογισμό)

ενδιάμεσοι χρόνοι

exp(λ)