Θυμίζουμε:

Έχουμε ήδη μιλήσει για τις απαριθμήτριες στοχαστικές διαδικασίες (ανελίξεις) (counting process)

$N(t) \in \{0, 1, \dots\}$

$N(t)$ αύξουσα συνάρτηση του t

$N(t+s) - N(s)$ = # γεγονότων στο διάστημα $(s, s+t]$ = # προσαυξήσεων στο $(s, s+t]$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέμε ότι έχει

ανεξάρτητες προσαυξήσεις (independent increments)

όταν $\forall\ 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ ισχύει ότι οι

$N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες

δηλαδή οι προσαυξήσεις σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα είναι ανεξάρτητες

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Μια απαριθμήτρια στοχ. διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέμε ότι έχει

ομογενείς προσαυξήσεις

όταν $\forall\ 0 \leq t_1 \leq t_2$ και $s > 0$ ισχύει ότι $N(t_2+s) - N(t_1+s) \stackrel{d}{=} N(t_2) - N(t_1)$

Δηλαδή ο # των προσαυξήσεων σ' ένα χρονικό διάστημα εξαρτάται από

το μήκος του διαστήματος: Η κατανομή του $N(t+s) - N(s)$ δεν εξαρτάται

από το s. $(\forall\ t, s \geq 0)$

Στοχαστική Διαδικασία Poisson με ρυθμό (λ)

(ειδική περίπτωση ανανεωτικής διαδικασίας, γεγονότα που συμβαίνουν ΤΥΧΑΙΑ)

3 ορισμοί

1: Ανανεωτικός ορισμός
2: Μακροσκοπικός
3: Μικροσκοπικός / Τοπικός

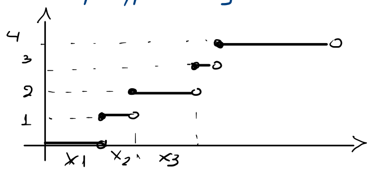
Poisson process (λ) PP(λ)

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 (Ανανεωτικός ορισμός)

Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ που παράγεται από την $\{X_n, n \geq 1\}$ καλείται **διαδικασία Poisson με παράμετρο (ή ρυθμό) λ ($\lambda > 0$)**

$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$

Εαν $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων & ισόνομων τ.μ. με κατανομή $\exp(\lambda)$



(Διαδικασία Poisson = Ανανεωτική διαδικασία + $X_n \sim \exp(\lambda)$)

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 (Μακροσκοπικός/ολικός)

Μια απαριθμήτρια στοχ. διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέγεται διαδικασία Poisson με παρ. ρυθμό λ, $\lambda > 0$

Εαν (i) $N(0) = 0$, (ii) έχει ανεξάρτητες & ομογενείς προσαυξήσεις

(iii) $P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ $n = 0, 1, \dots$ (δηλ. $N(t) \sim$ Poisson(λt))

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 (Μικροσκοπικός/τοπικός)

Μια απαριθμήτρια στοχ. διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέγεται διαδικασία Poisson με ρυθμό παρ. λ, $\lambda > 0$

Εαν (i) $N(0) = 0$ (ii) έχει ανεξάρτητες & ομογενείς προσαυξήσεις

(iii) $P(N(h) = k) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & k = 0 \\ \lambda h + o(h) & k = 1 \\ o(h) & k \geq 2 \end{cases}$ $\rightarrow \frac{P(N(h) \geq 2)}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$

(Μια συνάρτηση $f(h)$ λέμε ότι είναι $o(h)$ όταν $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$ (Πάει πιο γρήγορα στο 0 το $o(h)$ από ότι πάει το h στο 0.)

Θα δώσουμε την ισοδυναμία των ορισμών: $① \Leftrightarrow ② \Leftrightarrow ③$

$① \Longrightarrow ②$ (περίγραμμα ισοδυναμίας)

Έστω $\{N(t); t \geq 0\}$ αυ. διαδικασία με ενδ. χρόνους $\{\underline{\underline{X_n}}, n \geq 1\}$

$X_n \sim \exp(\lambda)$ $\quad F_{X_1}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x > 0 \qquad P(X_1 > x) = e^{-\lambda x}$.

(i) $P(N(0) = 0) = P(X_1 > 0) = e^{-\lambda \cdot 0} = 1$

(ii) Θέλω ανεξάρτητες & ομογενείς προσαυξήσεις για την $N(t)$

Έστω μια χρονική στιγμή $\underline{\underline{t}}$

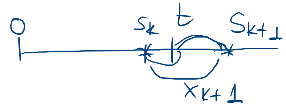
$\{N(u) : \underline{0 \leq u \leq t}\}$ $\qquad \{N(t+u) - N(t) ; u \geq 0\}$. $\qquad$ Θέλω ανεξαρτησία

Και ότι έχουν ίδια στοχ. συμπεριφορά

$\{N(u) : 0 \leq u < t\}$ περιγράφει παρελθόν $\quad + \quad N(t)$ παρόν.

$\{N(t+u) - N(t) ; u \geq 0\}$ περ. μέλλον.

Έστω $\boxed{N(t) = k}$. $\qquad S_k \leq t \,, \; S_{k+1} > t$



$\{N(u); 0 \leq u \leq t\}$

$X_1, \ldots, X_k$ περιγράφουν παρελθόν $\qquad , \; X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1} > t$.

$\underbrace{X_{k+2}, X_{k+3}, \ldots}$ $\qquad$ μέλλον $\qquad + \quad S_{k+1} - t \,/\, S_{k+1} - t > 0$

$(X_1 + \cdots + X_k) + X_{k+1} - t \,/\, X_{k+1} > t - X_1 - \cdots - X_k$

$X_{k+1} - (t - X_1 - X_2 \cdots - X_k) \,/\, X_{k+1} > t - X_1 - \cdots - X_k$

$$P(\underbrace{X_1 + \cdots + X_{k+1} - t} > u \mid X_1 + \cdots + X_{k+1} - t > 0) =$$

$$= P(X_{k+1} > \underbrace{u + t - X_1 - \cdots - X_k} \mid X_{k+1} > \underbrace{t - X_1 \cdots - X_k}) =$$

αμν. ιδιότητα $\quad P(X_{k+1} > u) = e^{-\lambda u}$

$X_{k+1} - (t - X_1 \cdots - X_k) \,/\, X_{k+1} > t - X_1 \cdots - X_k$ ανεξ. των $X_1, \ldots, X_k$

και $X_{k+2}, X_{k+3}, \ldots$ ανεξ. των $X_1, \ldots, X_k$.

(iii) μένει να δείξω ότι $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ $n=0,1,\dots$

$X_1,\dots X_n \sim \exp(\lambda)$ ανεξ. $\Big\{$ $S_n \sim \Gamma(\underset{\alpha}{n},\underset{\beta}{\lambda})$ $X_{n+1}\sim \exp(\lambda)$

$S_n,\ X_{n+1}$

$$f_{S_n,X_{n+1}}(s,u) \overset{S_n,X_{n+1}\text{ ανεξ.}}{=} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s}\,\lambda e^{-\lambda u} \qquad s,u\geq 0.$$

$$P(N(t)=n) = P(S_n\leq t,\ S_{n+1}>t) = P(S_n\leq t,\ X_{n+1}+S_n>t)$$
$$= P(S_n\leq t,\ X_{n+1}>t-S_n)$$
$$= \int_0^t\int_{t-s}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s}\lambda e^{-\lambda u}\,du\,ds$$
$$= P(X_{n+1}>t-s) \quad X_{n+1}\sim\exp(\lambda)$$
$$= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s}\left[\int_{t-s}^{\infty}\lambda e^{-\lambda u}du\right] ds.$$
$$= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s}\, e^{-\lambda(t-s)}\,ds.$$
$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\int_0^t s^{n-1}ds = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!}\frac{t^n}{n} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

σχολιο

$$P(N(t) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$\|$$

$$P(S_n \leq t) = \underbrace{\int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} ds}$$

$$<$$

(2) $\Longrightarrow$ (1)

Έστω $\{N(t), t\geq 0\}$ απαρ. με ανεξ. & ομογενείς προσαυξήσεις

και $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ $\quad n=0,1,\dots$

Θα αποδείξω

ότι είναι ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $\{X_n, n\geq 1\}$

$(X_1, X_2, X_3, \dots$, ανεξ & ισόνομες$)$

$+\ X_1 \sim exp(\lambda)$

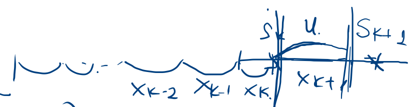
$$\overset{S_1}{X_1} = \inf\{s\geq 0 : N(s)=1\}$$

$$P(X_1>t) = P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} \Rightarrow X_1\sim exp(\lambda)$$

$X_2 = S_2 - S_1,\ X_3 = S_3 - S_2$

$$S_{k+1} = \inf\{s\geq 0 : N(s)=k+1\}$$

$$X_{k+1} = S_{k+1} - S_k.$$



$$P(X_{k+1} > u \,/\, X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_k=x_k) =$$

$$= P(N(\underbrace{X_1+\dots+X_k}_{S_k}+u) - N(\underbrace{X_1+\dots+X_k}_{S_k}) = 0 \,/\, X_1=x_1, \dots, X_k=x_k)$$

$N(s)=0 \quad s\in[0,x_1)$

$N(s)=1 \quad s\in[x_1, x_1+x_2)$

$N(s)=2 \quad s\in[x_1+x_2, x_1+x_2+x_3)$

$\dots$

Ιστορία

$$\overset{\text{ανεξ}}{\underset{\text{προσαυξ}}{=}} P(N(X_1+\dots+X_k+u) - N(X_1+\dots+X_k) = 0)$$

$$\overset{\text{ομογ}}{\underset{\text{προσ}}{=}} P(N(u)=0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} \quad \sim exp(\lambda)$$

$$\Rightarrow X_k\sim exp(\lambda) \quad \forall k.$$

ολικό 2 $\Rightarrow$ 3 τοπικό

$N(t)$ ανεξ. & ομ. προσαυξ.

Σειρά Taylor

Poisson(μ)

$$\sum_x \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = 1$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = e^{\mu}$$

Έστω

$$P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$P(N(h)=0) = \underbrace{e^{-\lambda h}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^k}{k!}$$

$$= \underbrace{1 - \lambda h + o(h)}$$

$$P(N(h)=1) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!} = (1-\lambda h + o(h))\cdot \lambda h =$$

$$= \lambda h - \underbrace{\lambda^2 h^2 + \lambda h \cdot o(h)}_{o(h)}$$

$$P(N(h)\geq 2) = 1 - P(N(h)=0) - P(N(h)=1) = o(h).$$

τοπικό ③ $\Rightarrow$ ② ολικό

ο μοχ. & ανεξ. προσαυξ. V.

Έχω $P(N(h)=1)=\lambda h+o(h)$
Β(h) $P(N(h)=0)=1-\lambda h+o(h)$
$P(N(h)\geq 2)=o(h)$
θα δείξω $P(N(t)=n)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ ..

$p_n(t)=P(N(t)=n)$

$(t,t+h]$ $\quad (0,t]$

$$P_0(t+h)=P(N(t+h)=0)=P(N(t+h)-N(t)=0,\ \underset{N(t)-N(0)}{N(t)=0})=$$

$$\underset{\text{προσ.}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} P(N(t+h)-N(t)=0)\cdot P(N(t)=0)$$

$$\underset{\text{προσ.}}{\overset{\text{ομογ.}}{=}} P(N(h)=0)\cdot P(N(t)=0) \Rightarrow$$

$$P_0(t+h)=P_0(h)\cdot P_0(t)=(1-\lambda h+o(h))\cdot p_0(t)$$
$$p_0(t+h)=p_0(t)-\lambda h\,p_0(t)+o(h)\,p_0(t)$$

$p_0(t)$

$$P_0(t+h)-p_0(t)=-\lambda h\,p_0(t)+o(h)\,p_0(t)$$

$$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}=-\lambda p_0(t)+\frac{o(h)}{h}p_0(t)$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}=-\lambda p_0(t) \Rightarrow P_0'(t)=-\lambda p_0(t)$$

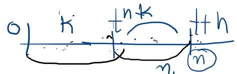
$$e^{\lambda t}p_0'(t)+\lambda e^{\lambda t}p_0(t)=0 \quad \text{ή} \quad \left(e^{\lambda t}p_0(t)\right)'=0$$

$$e^{\lambda t}p_0(t)=c \quad \text{ή} \quad p_0(t)=c\,e^{-\lambda t}$$
$$p_0(0)=1 \Big\} \ c=1$$

$$\underline{\underline{p_0(t)}}=P(N(t)=0)=\underline{\underline{e^{-\lambda t}}}$$

$P(N(t)=n)=e^{-\lambda t}$ $\quad n=0$

Θέλω $\quad P(N(t)=n)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \forall\, n\geq 0$



$$p_n(t+h)=P(N(t+h)=n)=\sum_{k=0}^{n} P(N(t+h)-N(t)=n-k\ ,\ N(t)=k)$$

$$\overset{\text{ανεξ. προσ.}}{=}\sum_{k=0}^{n} P(N(t+h)-N(t)=n-k)\,P(N(t)=k)$$

$$\overset{\text{ομογ. προσ.}}{=}\sum_{k=0}^{n} P(N(h)=n-k)\,P(N(t)=k)=\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(h)\cdot P_k(t)$$

$$P_n(t+h)=\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(h)P_k(t)=P_0(h)P_n(t)+P_1(h)P_{n-1}(t)+\underset{P_2(h)}{\sum_{k=0}^{n-2}}\underset{P_n(h)}{P_{n-k}(h)}P_k(t)$$

$$P_0(h)=P(N(h)=0)=1-\lambda h+o(h)$$
$$P_1(h)=P(N(h)=1)=\lambda\cdot h+o(h)$$
$$m\geq 2 \qquad P_m(h)=o(h)$$

$$P_n(t+h)=(1-\lambda h+o(h))P_n(t)+(\lambda h+o(h))P_{n-1}(t)+\sum_{k=0}^{n-2}o(h)P_k(t)$$

$$P_n(t+h)=P_n(t)-\lambda h P_n(t)+\underbrace{o(h)P_n(t)}_{o(h)}+\lambda h P_{n-1}(t)+\underbrace{o(h)P_{n-1}(t)}_{o(h)}+\underbrace{\sum_{k=0}^{n-2}o(h)P_k(t)}_{o(h)}$$

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=\frac{-\lambda \cancel{h} P_n(t)}{\cancel{h}}+\frac{\lambda \cancel{h} P_{n-1}(t)}{\cancel{h}}+\frac{o(h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+0$$

$$e^{\lambda t} \qquad P_n'(t)+\lambda P_n(t)=\lambda P_{n-1}(t)$$

$$\left(e^{\lambda t}P_n(t)\right)'=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) \qquad\qquad P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

$$\left(e^{+\lambda t}P_1(t)\right)'=\lambda e^{\lambda t}P_0(t)=\lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}=\lambda$$

$$e^{+\lambda t}P_1(t)=\lambda\cdot t+c$$
$$P_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t}+c e^{-\lambda t}$$

$$P_1(t)=P(N(t)=1) \qquad\qquad P_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$$
$$P(N(0)=1)=0 \longrightarrow c=0$$

Έστω $p_{n-1}(t) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

$$\left(e^{\lambda t} p_n(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

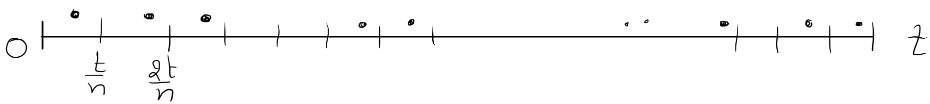
$$\left(e^{\lambda t} p_n(t)\right)' = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \Rightarrow e^{\lambda t} p_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\frac{t^n}{n} + c$$

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} + c e^{-\lambda t} \qquad p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$p_n(0) = 0$ $\quad c = 0$

Διαισθητική απόδειξη (του (3) ⇒ (2)) $\qquad \frac{t}{n} = h$

Έστω $N(t)$ ο # γεγονότων (σημείων) στο $[0,t]$.



Χωρίζουμε το διάστημα $[0,t]$ σε n υποδιαστήματα μήκους $\frac{t}{n}$.

Σε κάθε διάστημα $\exists$ 0 ή 1 γεγονός με μεγάλη πιθανότητα

Πιθανότητα ένα τέτοιο μικρό διάστημα (υποδιάστημα) να έχει 2 ή περισσότερα σημεία είναι αμελητέα.

$$P\left(N\left(\frac{kt}{n}\right) - N\left(\frac{(k-1)t}{n}\right) = 1\right) = P\left(N\left(\overset{h}{\frac{t}{n}}\right) = 1\right) = \overset{\lambda \cdot h}{\frac{\lambda t}{n}} + o\left(\frac{t}{n}\right) \quad \forall k$$

λόγω ομογενών προσαυξήσεων

Και λόγω ανεξάρτητων προσαυξήσεων, το εάν ένα σημείο περιέχεται σ' ένα συγκεκριμένο τέτοιο διάστημα είναι ανεξάρτητο από τα σημεία σε άλλα διαστήματα.

Για μεγάλο n, το αποτέλεσμα σε κάθε υποδιάστημα είναι ακολουθία n ανεξ. & ισόνομων δοκιμών Bernoulli με $p_n = P(\text{ένα σημείο περιέχεται σ' ένα διάστημα}) = \frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)$

Άρα ο # σημείων στο $[0,t]$ είναι άθροισμα ανεξ. & ισόνομων Bernoulli $\sim B(n,p_n)$

Όμως ξέρω ότι η $B(n,p_n)$ προσεγγίζεται από Poisson$(\underbrace{n \cdot p_n}_{\lambda})$ για μεγάλα n

αφού $n p_n = n\left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right] = \lambda t + n\, o\left(\frac{t}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda t > 0$

$$\left(\lim_{\frac{1}{n}\to 0} \frac{o\left(\frac{t}{n}\right)}{t/n} = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty} n\left(o\left(\frac{t}{n}\right)\right) = 0\right]$$