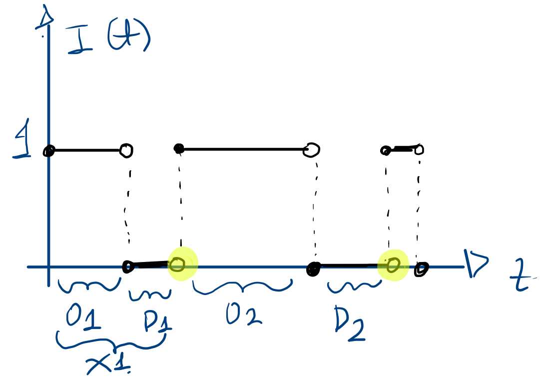
Έστω στοχ. διαδικασία $\{I(t);\ t\geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων $\{0,1\}$
(εκφράζει τη λειτουργία ή όχι της μηχανής.)
Έστω ότι η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση 1
(κατάσταση λειτουργίας – Operating state / up state)



O_n = τ.μ. εκφράζει τον n-οστό χρόνο λειτουργίας
D_n = " τον n-οστό χρόνο αργίας

$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{η μηχανή λειτουργεί τη χρ. στιγμή } t \\ 0 & \text{" " δε λειτουργεί} \end{cases}$

Υποθέτουμε ότι (O_n, D_n), $n\geq 1$ ανεξάρτητες & ισόνομες και

$$E(O_1) = \mu_0 \ , \quad E(D_1) = \mu_D$$

$$F_{O,D}(x,y) = P(O_1 \leq x,\ D_1 \leq y)$$

$$X_n = O_n + D_n$$

(O_n, D_n μπορεί να είναι εξαρτημένες)

Ας μελετήσουμε την $(S_1 = X_1 = O_1 + D_1)$

$p(t) = P($η μηχανή είναι σε λειτουργία τη χρονική στιγμή $t.) = P(I(t)=1)$

① Ανανεωτική εξίσωση

$$p(t) = \int_0^\infty P(I(t)=1 \mid S_1 = u)\, dF_{S_1}(u)$$

$$P(I(t)=1 \mid S_1 = u) = \begin{cases} P(I(t-u)=1) = p(t-u) & u \leq t \\ P(O_1 > t \mid S_1 = u) & u > t \end{cases}$$

$$p(t) = \int_t^\infty P(O_1 > t \mid S_1 = u)\, dF_X(u) + \int_0^t p(t-u)\, dF_X(u)$$

$$p(t) = d(t) + \int_0^t p(t-u)\, dF_X(u) \qquad d(t) = \int_t^\infty P(O_1 > t \mid S_1 = u)\, dF_X(u)$$

$$d(t) = \int_t^\infty P(O_1 > t \mid \underbrace{O_1 + D_1}_{X_1} = u)\, dF_{X_1}(u) \qquad X_1 = O_1 + D_1$$

$$= P(\underset{A}{O_1 > t} \overset{\text{και}}{,} \underset{B}{O_1 + D_1 > t}) = P(O_1 > t)$$

$$A \wedge B$$

$$\{O_1 > t\} \subseteq \{O_1 + D_1 > t\}$$

β΄ τρόπος

$$P(O_1 > t \mid O_1 + D = u) = 0 \quad u \leq t$$

$$= \int_0^\infty P(O_1 > t \mid O_1 + D_1 = u)\, dF_{X_1}(u) = P(O_1 > t)$$

Ανανεωτική εξίσωση για την $p(t) = P(I(t) = 1)$

$$p(t) = P(O_1 > t) + \int_0^t p(t-u)\, dF_X(u)$$

② λύση της ανανεωτικής

$$P(t) = \underbrace{P(O_1 > t)}^{d(t)} + \int_0^t P(O_1 > t-u)\, d\, m_X(t)$$

$$d(t) = d_1(t) - d_2(t)$$

③ $d(t) \geq 1 - F_{O_1}(t) = d_1(t)$, $d_2(t) = 0$ $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, d_1, d_2 μη αρνητικές φραγμένες και φθίνουσες και $\int_0^\infty |d(t)|\,dt = \int_0^\infty (1 - F_0(t))\,dt = \mu_0 < \infty$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του ΒΑΘ, το εφαρμόζουμε:

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{\int_0^\infty d(t)\,d(t)}{\mu} = \frac{E(O)}{E(O)+E(D)}$$

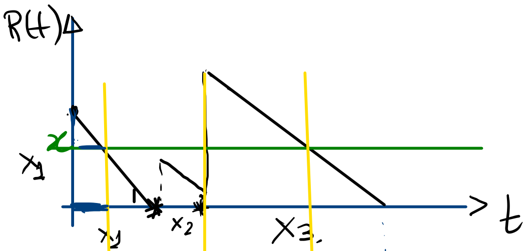
$$\lim_{t\to\infty} P(I(t)=0) = \frac{E(D)}{E(O)+E(D)}$$

Εφαρμογή 1:

Για $O \sim \exp(\lambda)$, $D \sim \exp(\mu)$ $\quad X = O + D$

$$\lim_{t\to\infty} P(I(t) = 1) = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Ενας άλλος τρόπος υπολογισμού του $\lim_{t\to\infty} P(R(t)>x)$

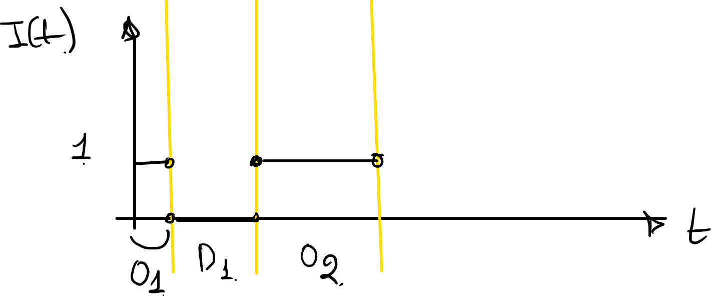


X_n , x.

$$\Big\| $$

$$\lim_{t\to\infty} P(I(t)=1)$$

$$I(t) = \begin{cases} 1 & R(t)>x \\ 0 & R(t)\le x \end{cases}$$



$$O_n = \max\{\overset{X_1 - x}{X_n - x}, 0\}$$

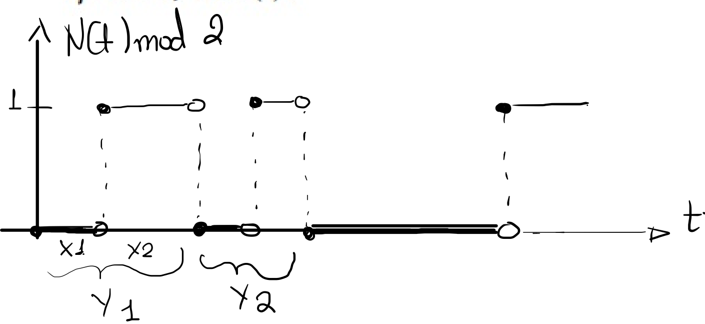
$$D_n = \min\{X_n, x\}$$

$$E(O) = \int_x^\infty [1-F_X(u)]du$$

$$E(X_1) = \int_0^\infty [1-F_X(u)]du$$

$$\lim_{t\to\infty} P(I(t)=1) = \frac{E(O)}{E(O)+E(D)} = \frac{\int_x^\infty (1-F_X(u))du}{\mu}$$

Άσκηση 1.7 *Έστω μια ανανεωτική διαδικασία* $\{N(t)\}$ *με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων* $F_X(t)$ *και έστω* $h(t) = \Pr[N(t)\ \textit{περιττός}]$, $t \geq 0$. *Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την* $h(t)$ *και να λυθεί. Να βρεθεί το όριο* $\lim_{t\to\infty} h(t)$.



H/W