Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους ανανέωσης $\{X_n, n \geq 1\}$, με $F_X(t) = P(X_1 \leq t)$, σππ $f_X(\cdot)$, $\mu = E(X_1)$, $\sigma^2 = Var(X_1)$.

Ορίζουμε τις διαδικασίες:

Age (renewal) process

$\{A(t), t \geq 0\}$ όπου $A(t) = t - S_{N(t)}$, $t \geq 0$ (χρόνος που πέρασε από το προηγ. γεγονός)

ηλικία (Age)

παρελθόντα χρόνο ή αναδρομικό χρόνο ανανέωσης

Residual renewal process

$\{R(t), t \geq 0\}$ όπου $R(t) = S_{N(t)+1} - t$, $t \geq 0$

υπολειπόμενος ή προδρομικός χρόνος ανανέωσης.

Total renewal time

$\{T(t), t \geq 0\}$ όπου $T(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$

t - εξαρτώμενος ενδιάμεσος χρόνος

$$T(t) = A(t) + R(t)$$

(Θυμίζουμε ότι σε προηγούμενο αρχείο έχουμε δείξει ότι $\underline{E(S_{N(t)+1})} = E(N(t)+1)E(X_1)$

ή $\underline{E(S_{N(t)+1}) = (m(t)+1)E(X_1)}$.)

Residual Process

$$R(t) = S_{N(t)+1} - t$$

Ας μελετήσουμε την:

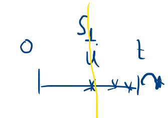
$$E(S_{N(t)+1} - t) = E(R(t)) = h(t)$$

ανανεωτικός συλλογισμός

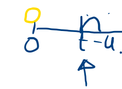
$$h(t) = \int_0^\infty E(S_{N(t)+1} - t \mid S_1 = u)\, dF_X(u) \qquad E[E(S_{N(t)+1} - t \mid S_1)]$$

$$E(S_{N(t)+1} - t \mid S_1 = u) = \begin{cases} u - t & t < u \\ E[S_{N(t-u)+1} - (t-u)] = h(t-u) & t \geq u \end{cases}$$

$$\{ S_{N(t)+1} - t \mid S_1 = u \stackrel{d}{=} S_{N(t-u)+1} - (t-u) \quad u \leq t \}$$



$$h(t) = \underbrace{\int_t^\infty (u-t)\, dF_X(u)} + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)$$



$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)$$ αν. εξίσωση για την $h(t)$

$t < y \leq u \qquad t < u < \infty$

$$d(t) = \int_t^\infty (u-t)\, dF_X(u) = \int_t^\infty \int_t^u dy\, dF_X(u) = \int_t^\infty \int_y^\infty dF_X(u)\, dy =$$

$$d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y))\, dy$$

• Η ανανεωτική εξίσωση για την $E[R(t)]$ έχει λύση

η

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)\,dF_X(u)$$

έχει λύση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\,dm_X(u) \qquad d(t) = \int_t^\infty (1-F_X(u))\,du$$

$$h(t) = E(R(t)) = \int_t^\infty (1-F_X(u))\,du + \int_0^t \int_{t-u}^\infty (1-F_X(y))\,dy)\,dm_X(u)$$

• Για να υπολογίσουμε το $\lim_{t\to\infty} E(R(t))$ θα εφαρμόσουμε το; ΒΑΘ

X συνεχής.

$$\underline{d(t)} = \int_t^{\infty} (1-F_X(y))dy = \underline{d_1(t)} - \overset{=0}{d_2(t)}$$

μη αρνητική, φθίνουσα $(d'(t) = -[1-F_X(t)] = F_X(t)-1 < 0)$

$t \geq 0$ και φραγμένη.

$$d(t) = \int_t^{\infty}(1-F_X(y))dy \leq \int_0^{\infty}(1-F_X(y))dy = \mu = E(X)$$

$$\int_0^{\infty}|d(u)|du = \int_0^{\infty} d(u)du = \int_0^{\infty}\int_u^{\infty}[1-F_X(y)]dy\,du =$$

$0<u<\infty$
$u<y<\infty$
$y<\underline{x}<\infty$

$$= \int_0^{\infty}\int_u^{\infty}\int_y^{\infty} dF_X(x)\,dy\,du \qquad 0<u<y<x<\infty$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{x}\int_0^{y} du\,dy\,dF_X(x) = \int_0^{\infty}\int_0^{x} y\,dy\,dF_X(x) = \int_0^{\infty}\frac{x^2}{2}dF_X(x)$$

$$= \frac{1}{2}E(X^2) = \frac{E^2(X)+V(X)}{2} < \infty$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΒΑΘ άρα το εφαρμόζω:

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = \frac{\int_0^{\infty} d(t)dt}{\mu \; = (E(X))} = \frac{1}{2}\cdot\frac{E(X^2)}{E(X)} = \frac{1}{2}\frac{\mu^2+\sigma^2}{\mu} = \frac{\mu}{2}+\frac{\sigma^2}{2\mu} \geq \frac{\mu}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} E(R(t)) = \frac{E(X^2)}{2E(X)} = \frac{\mu}{2}+\frac{\sigma^2}{2\mu} \geq \frac{\mu}{2}$$

Άσκηση 1.8 *Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$, με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$. Έστω $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t. Θεωρούμε κάποιο σταθερό $x \geq 0$ και έστω $h(t) = \Pr[R(t) > x]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι*

$$h(t) = \Pr[R(t) > x] = 1 - F_X(x+t) + \int_0^t (1 - F_X(x+t-u))dm(u), \quad t, x \geq 0.$$

Να αποδειχθεί, επίσης, ότι

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \Pr[R(t) > x] = \frac{\int_x^\infty (1 - F_X(u))du}{\mu}, \quad x \geq 0.$$

$$h(t) = P(R(t) > x) = \int_0^\infty P(R(t) > x / S_1 = u)\, dF_X(u)$$

$$P(R(t) > x / S_1 = u) = \begin{cases} P(R(t-u) > x) & u \leq t \\ 1 & u > x+t \\ 0 & t < u \leq x+t \end{cases}$$

$$h(t) = \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) + \cancel{\int_t^{x+t} 0\, dF_X(u)} \to 0 + \int_{x+t}^\infty 1\, dF_X(u) =$$

$$h(t) = 1 - F_X(x+t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)$$

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) \qquad d(t) = 1 - F_X(x+t)$$

αναν. εξίσωση για την $h(t) = P(R(t) > x)$

έχει λύση

$$h(t) = 1 - F_X(x+t) + \int_0^t (1 + F_X(x+t-u))\, dm_X(u)$$

? $\lim_{t\to\infty} h(t)$? εφαρμόζεται το ΒΑΘ ?

$$d(t) = 1 - F_X(t+x) = \underbrace{d_1(t)}\, - \overset{0}{\overset{\parallel}{d_2(t)}}$$

d_1 μη αρνητική, φθίνουσα (ως προς t) $\quad 0 \le d_1(t) \le 1$

$$\int_0^{\infty} |d(t)|\,dt = \int_0^{\infty} d(t)\,dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t+x))\,dt \ \underset{=}{\overset{y = t+x}{=}}$$

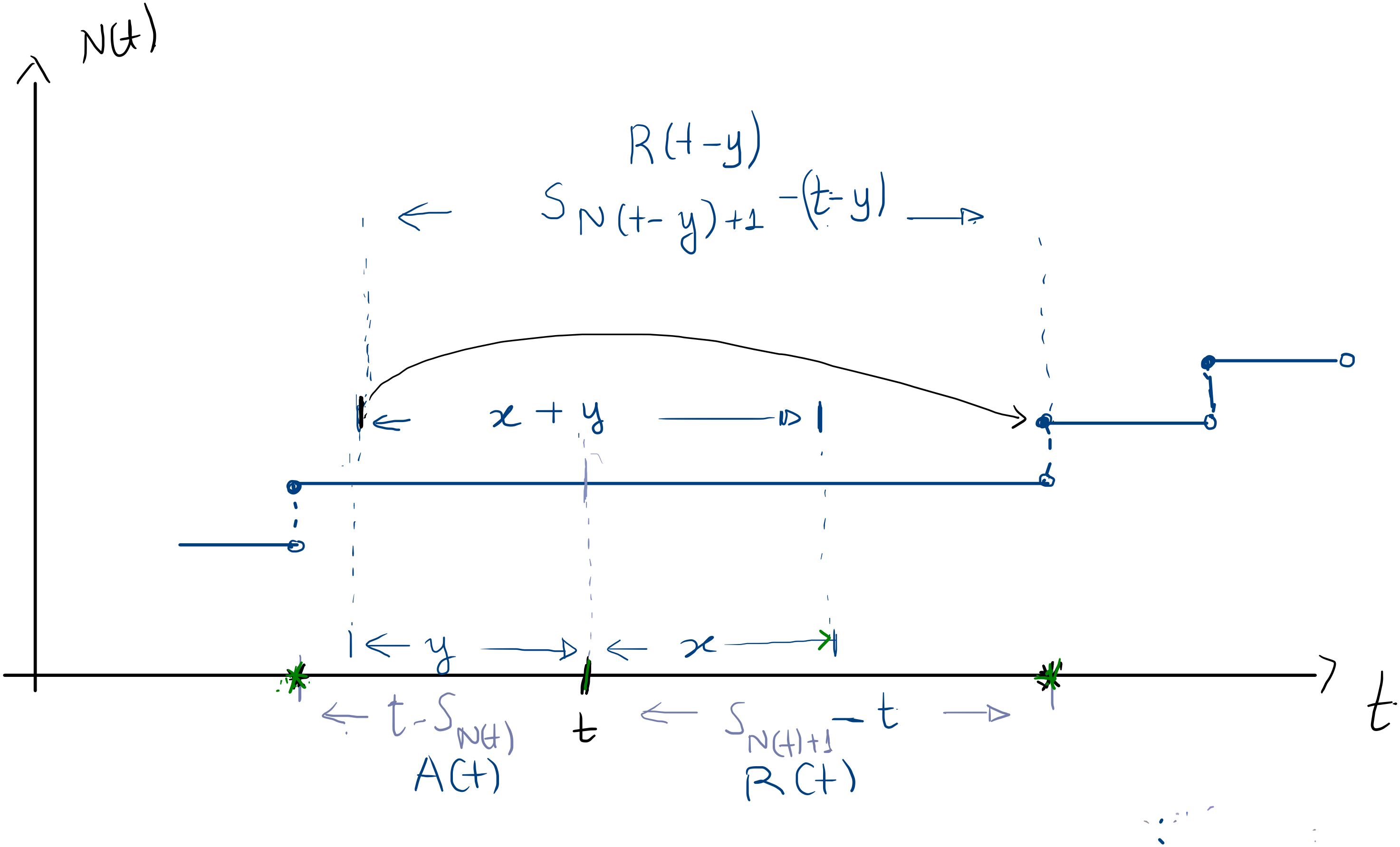
$$= \int_x^{\infty} (1 - F_X(y))\,dy \le \int_0^{\infty} (1 - F_X(y))\,dy = \overset{E(X)}{\overset{\parallel}{\mu}} < \infty$$

Εφαρμόζεται το ΒΑΘ ! ☺

$\bar{F}_X(y) = P(X > y)$

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t) \ge x) = \lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^{\infty} d(t)\,dt}{\mu} = \frac{\int_x^{\infty} (1 - F_X(y))\,dy}{\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t) \le x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{x} (1 - F_X(y))\,dy$$



N(t)
R(t-y)
S_{N(t-y)+1} - (t-y)
x + y
y
x
t
t - S_{N(t)}
A(t)
S_{N(t)+1} - t
R(t)

Συνέχεια Άσκησης 1.8 :

Κάτω από τις υποθέσεις της άσκησης, δείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) \geq y, R(t) > x) = \frac{1}{\mu}\int_{x+y}^{\infty} (1 - F_X(u))\,du \qquad \mu = E(X_1)$$

απόδειξη.

$t > y$.

$\{A(t) \geq y, R(t) > x\} \Leftrightarrow \{$Δεν έχω ανανεώσεις στο $(t-y, t+x]\}$
$\{R(t-y) > x+y\}$.

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) \geq y, R(t) > x) = \lim_{t\to\infty} P(R(t-y) > x+y) = \lim_{t\to\infty} P(R(t) > x+y)$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_{x+y}^{\infty} (1 - F_X(u))\,du.$$

Σχόλιο:

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) \geq y) \underset{+}{=} \lim_{t\to\infty}\lim_{x\to 0^+} P(A(t) \geq y, R(t) > x) = \lim_{x\to 0^+}\lim_{t\to\infty} P(A(t) \geq y, R(t) > x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\mu}\int_{x+y}^{\infty} (1 - F_X(u))\,du\right) = \frac{1}{\mu}\int_{y}^{\infty} (1 - F_X(u))\,du$$

Age Process

$$A(t) = t - S_{N(t)} \qquad t \geq 0$$

$\{A(t) \geq x\} \Leftrightarrow \{$Δεν έχω ανανεώσεις στο $(t-x, t]\}$

$\Leftrightarrow \{ R(t-x) > x \}$

Ασκηση

Δείξτε ότι η ανανεωτική εξίσωση για την $P(A(t) \geq y)$ είναι η

$$P(A(t) \geq y) = 1_{\{t \geq y\}} [1 - F_X(t)] + \int_0^t P(A(t-u) \geq y) \, dF_X(u)$$

Δώστε την εξίσωση για τη λύση της

+ οριακό

H/W

$E(A(t)) = ;$ ανον. συλλογισμό

H/W

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) > x)$$

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t)\le x)$$

$A(t) \Longleftrightarrow R(t)$

<u>1ος τρόπος.</u> $\{A(t) \geq x\} \Leftrightarrow \{R(t-x) > x\}$

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) < x) = 1 - \lim_{t\to\infty} P(R(t-x) > x) = 1 - \lim_{t\to\infty} P(R(t) > x)$$

$$= 1 - \frac{1}{\mu}\int_x^\infty [1-F_X(y)]\,dy$$

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) < x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1-F_X(y)]\,dy = \lim_{t\to\infty} P(R(t) < x)$$

$\le$

<u>2ος τρόπος</u>

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) \geq x) = \lim_{t\to\infty}\lim_{u\to 0^+} P(A(t) \geq x, R(t) > u) = \lim_{u\to 0^+}\lim_{t\to\infty} P(A(t) \geq x, R(t) > u)$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\left[\frac{1}{\mu}\int_{u+x}^\infty (1-F_X(y)]\,dy\right. = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty [1-F_X(y)\,dy$$

<u>3ος τρόπος</u>

με ανον. συλλογισμό, βρίσκω αν. εξίσ.: $P(A(t) \geq x) = P(A(t) \geq x, S_1 > t) + \int_0^t P(A(t-u) \geq x)\,dF_X(y)$

$$d(t) = P(A(t) \geq x, S_1 > t) = 1_{\{t \geq x\}}[1-F_X(t)] = d_1(t)$$

ΕΦ. ΒΑΘ.

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) \geq x) = \frac{\int_0^\infty d(t)\,dt}{\mu} = \frac{\int_x^\infty [1-F_X(y)]\,dy}{\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty} E[T(t)] = \lim_{t\to\infty} E[A(t)+R(t)] = \lim_{t\to\infty} [E(A(t)) + E(R(t))]$$

$$= \lim_{t\to\infty} E(A(t)) + \lim_{t\to\infty} E(R(t)) = \frac{E(X^2)}{2E(X)} + \frac{E(X^2)}{2E(X)}$$

$$= \frac{E(X^2)}{E(X)} = \frac{\sigma^2+\mu^2}{\mu} = \mu + \frac{\sigma^2}{\mu} \geq \mu.$$

$\mu = E(X)$

Ανανεωτικό παράδοξο

• Τι αντιπροσωπεύει το $X_{N(t)+1}$; Είναι το μήκος ποιου διαστήματος;
Να δείξουμε ότι $P(X_{N(t)+1} \geq x) \geq 1-F_{X_1}(x)$ $x>0$ $(X_{N(t)+1} \underset{\text{στοχ}}{\geq} X_1)$

$X_{N(t)+1}$: Μήκος του πρώτου ανανεωτικού διαστήματος που τελειώνει μετά το t

Σχόλιο:
Έστω $t = S_n$ $(S_{n-1}, S_n]$ ← περιλ. το t.
$(S_n, S_{n+1}]$ ← διάστημα με μήκος $X_{N(t)+1}$.

Ας δείξουμε ότι $P(X_{N(t)+1} \geq x) \geq 1-F_{X_1}(x)$

$$a = P(X_{N(t)+1} > x \mid N(t)=n, S_n = t-s) = P(X_{n+1} > x / X_{n+1} > s)$$

$$= \frac{P(X_{n+1} > x,\ X_{n+1} > s)}{P(X_{n+1} > s)} = \frac{P(X_{n+1} > \max(x,s))}{P(X_{n+1} > s)}$$

Εάν $x > s$. $a = \dfrac{P(X_{n+1} > x)}{P(X_{n+1} > s)} \geq P(X_{n+1} > x) = P(X_1 > x)$

Εάν $x \leq s$ $a = \dfrac{P(X_{n+1} > s)}{P(X_{n+1} > s)} = 1 \geq P(X_{n+1} > x) = P(X_1 > x)$

$$\Rightarrow P(X_{N(t)+1} > x) \geq 1-F_{X_1}(x)$$

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t) \le x) = \boxed{\frac{1}{\mu}\int_x^{\infty}[1-F_X(y)]dy} = \lim_{t\to\infty} P(A(t) < x)$$

αποδεικνύεται. $\lim_{t\to\infty} P(T(t) > x) = \frac{1}{\mu}\int_x^{\infty} s\, dF(s)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εάν X τμ με σκ $F_X(t)$, $0 < E(X) = \mu < \infty$, ορίζουμε τμ X_e με σσκ:

$$F_{X_e}(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1-F_X(y)]dy.$$ = κατανομή ισορροπίας της X

<u>Παρατήρηση</u>

Εάν X σταθερά $P(X=c)=1$

Για $x \ge c$ $\quad F_{X_e}(x) = \frac{1}{\mu}\left[\int_0^c [1-\overset{0}{\cancel{F_X}}(y)]dy + \int_c^x [1-\overset{1}{\cancel{F_X}}(y)]dy\right]$

$\mu = c$

$F_{X_e}(x) = \frac{1}{c}\, c = \underline{1}$

Για $x < c$ $\quad F_{X_e}(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x (1-0)\,dy = \frac{x}{c}$

$X_e \sim U(0,c)$

Εάν $X \sim \exp(\lambda) \Rightarrow$; Η/W $F_{X_e}(x)$